**Exercice 1** :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
On veut étudier la position de f par rapport à ses tangentes.

1) Soit a un nombre réel et A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a.
   Montrer que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en A est $y = e^a(x - a + 1)$.
2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = e^x - e^a x + e^a(x - 1).$$
   a) Déterminer la dérivée de la fonction g.
   b) Etudier les variations de la fonction g et donner son tableau de variations.
      On ne calculera pas les limites.
   c) Donner le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
3) Déduire de ce qui précède la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente de A.

**Exercice 2** : Etude d'une fonction

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (2 - x)e^x - 1.$$
   a) Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.
   b) Calculer la dérivée de f et déterminer son signe.
      En déduire les variations, puis le tableau de variations de f.
   c) Prouver que la fonction f s'annule uniquement en deux valeurs que l'on nommera $\alpha$ et $\beta$ avec $\alpha < \beta$.
   d) A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude $10^{-2}$ de $\alpha$ et $\beta$.
   e) Montrer que $e^\alpha = \dfrac{1}{2 - \alpha}$
2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x - x$.
   a) Calculer la dérivée sur $\mathbb{R}$ de h.
   b) Démontrer que, pour tout x, $h(x) > 0$.
3) Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$.
   a) Démontrer que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$ et préciser les éventuelles asymptotes.
   c) Calculer la dérivée de g.

CORRECTION

**Exercice 1** :

1) Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en A est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Soit : $y = e^a(x - a) + e^a$

Soit : $y = e^a(x - a + 1)$

2) a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x - e^a$

b) $g'(x) > 0 \Rightarrow e^x - e^a > 0 \Rightarrow x > a$

$g(a) = e^a - ae^a + ae^a - e^a = 0$

| x | $-\infty$ | a | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f' | - | | + |
| f(x) | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ |

c) D'après le tableau de variation de g, on a $g(x) \geq 0$ pour tout x réel.

3) On a $f(x) - e^a(x - a + 1) = e^x - xe^a + e^a(a - 1) = g(x)$

Comme $g(x) \geq 0$, on en déduit que $f(x) \geq e^a(x - a + 1)$

Donc $\mathscr{C}$ est toujours au dessus de la tangente de A.

**Exercice 2** : Etude d'une fonction

1) a) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b) $f'(x) = -e^x + (2 - x)e^x = e^x(1 - x)$

$f'(x) > 0 \Rightarrow x < 1$

f est croissante sur $]-\infty;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$.

Tableau de variations de f :

| x | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f' | + | | - |
| f(x) | -1 $\nearrow$ | e - 1 | $\searrow$ $-\infty$ |

$f(1) = e - 1 > 0$

c) La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; 1]$ et prend ses valeurs dans $]-1;e - 1]$. Donc d'après le théorème de la bijection il existe un unique réel $\alpha$ appartenant à $]-\infty; 1]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

La fonction f est strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$ et prend ses valeurs dans $[e - 1; -\infty[$. Donc d'après le théorème de la bijection il existe un unique réel $\beta$ appartenant à $[1;+\infty[$ tel que $f(\beta) = 0$.

d) On trouve $-1{,}15 < \alpha < -1{,}14$ et $1{,}84 < \beta < 1{,}85$.

e) Comme $f(\alpha) = 0$ alors $e^{\alpha} = \dfrac{1}{2 - \alpha}$

2) a) $h'(x) = e^x - 1$

b) $h'(x) > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow x > 0$

Tableau de variations de h :

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| h' | | - | | + | |
| h(x) | $+\infty$ | ↘ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

Du tableau des variations de h, on déduit directement que $h(x) > 0$ pour tout x réel.

3) a) Comme $e^x - x > 0$ pour tout x réel alors la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$$g(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - \dfrac{x}{e^x}}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$; donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$

La courbe représentant g admet en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = 1$.

c) $$g'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{(2 - x)e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{f(x)}{(e^x - x)^2}$$

$g'(x)$ est du signe de $f(x)$.

De la question 1), on déduit le tableau des variations de g :

| x | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| g' | | - | | + | | - | |
| g(x) | 0 | ↘ | m | ↗ | M | ↘ | 1 |

$$m = g(\alpha) = \frac{e^{\alpha} - 1}{e^{\alpha} - \alpha} = \frac{\dfrac{1}{2 - \alpha} - 1}{\dfrac{1}{2 - \alpha} - \alpha} = \frac{1 - 2 + \alpha}{1 - \alpha(2 - \alpha)} = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - 2\alpha + 1} = \frac{1}{\alpha - 1} \approx -0,47.$$

De même $M = g(\beta) = \dfrac{1}{\beta - 1} \approx 1{,}19$

Courbes représentant f et g dans un repère :