

Cours sur les intégrales



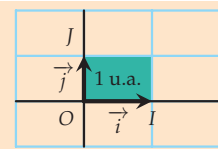
Mathématiques Web

Tout pour réussir en maths



DÉFINITION

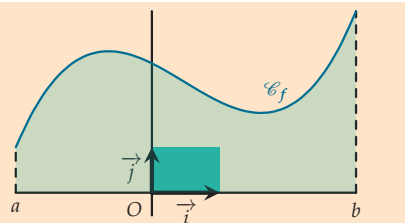
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal du plan.
 On note I et J les points tels que $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$.
 L'**unité d'aire**, que l'on note **u.a.**, est l'aire du rectangle dont O , I et J forment trois sommets.



1. Intégrale d'une fonction continue et positive

DÉFINITION : Notion d'intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ de courbe représentative \mathcal{C}_f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 L'**intégrale de a à b de f** est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



Cette aire se note $\int_a^b f(x) dx$ et on prononce « intégrale (ou somme) de a à b de $f(x) dx$ ».

REMARQUES :

- a et b s'appellent respectivement « borne inférieure » et « borne supérieure » de l'intégrale.
- La valeur de l'intégrale ne dépend que de a , b et f ; la variable x n'intervenant pas dans le résultat, on dit qu'elle est muette et l'on peut donc noter indifféremment :

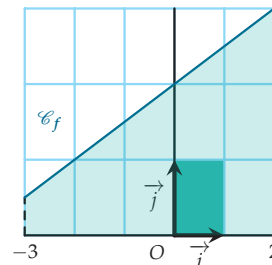
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots$$

- Pour toute fonction f continue et positive en un réel a , $\int_a^a f(x) dx = 0$ puisqu'il s'agit de l'aire d'un segment de hauteur $f(a)$.
- Le symbole \int est dû à G. W. Leibniz, (1646-1716). Il ressemble à un « s » allongé, rappelant que l'aire peut être calculée comme la somme de petites aires élémentaires.

Exemple Soit $f : x \mapsto \frac{x}{2} + 2$ définie sur $[-3; 2]$.
 Le domaine colorié est un trapèze dont l'aire est :

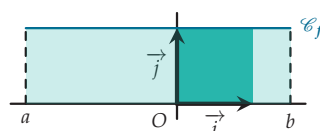
$$\int_{-3}^2 f(x) dx = \frac{0,5 + 3}{2} \times 5 = 8,75 \text{ u.a.}$$

Les unités graphiques étant 0,6 cm pour l'axe des abscisses et 1 cm pour l'axe des ordonnées, 1 u.a. représente 0,6 cm² et donc l'aire coloriée représente 5,25 cm².



Exemple Soit $f : x \mapsto 1$ définie sur $[a; b]$.
 Le domaine colorié est un rectangle de longueur $b - a$ et de largeur 1.
 Ainsi :

$$\int_a^b dx = b - a \text{ u.a.}$$



■ THÉORÈME : Dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est définie et dérivable sur $[a; b]$ et on a $F' = f$.

■ **PREUVE** On démontre ici cette propriété dans le cas d'une fonction f croissante.

Pour tout $x \in [a; b]$, $F(x)$ existe bien puisqu'il s'agit de l'aire du domaine compris entre \mathcal{C}_f et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a; x]$.

Démontrons maintenant que F est dérivable sur $[a; b]$. On considère alors, pour tous $x \in [a; b]$ et $h \neq 0$ tel que $x + h \in [a; b]$:

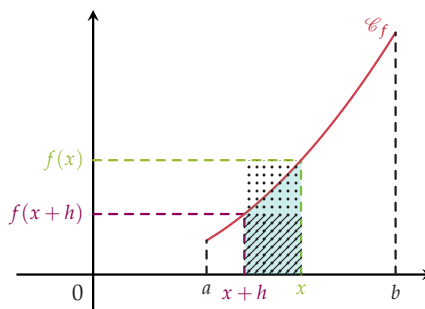
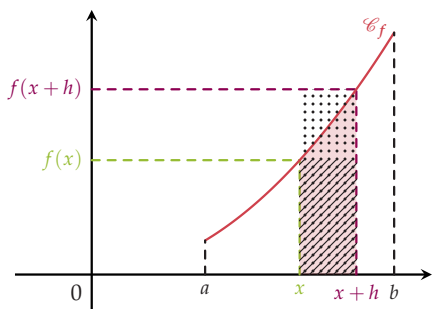
$$\frac{\Delta F}{\Delta x}(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Si $h > 0$ (voir schéma de gauche ci-dessous), $F(x+h) - F(x)$ représente l'aire du domaine compris entre \mathcal{C}_f et l'axe des abscisses, sur $[x; x+h]$. f étant croissante, cette aire est comprise entre celles des rectangles de largeur h et de hauteurs respectives $f(x)$ et $f(x+h)$:

$$f(x)h \leq F(x+h) - F(x) \leq f(x+h)h \iff f(x) \leq \frac{\Delta F}{\Delta x}(x) \leq f(x+h).$$

Si $h < 0$ (voir schéma de droite ci-dessous), $F(x) - F(x+h)$ représente l'aire du domaine compris entre \mathcal{C}_f et l'axe des abscisses, sur $[x+h; x]$. f étant croissante, cette aire est comprise entre celles des rectangles de largeur $-h$ et de hauteurs respectives $f(x+h)$ et $f(x)$:

$$f(x+h)(-h) \leq F(x) - F(x+h) \leq f(x)(-h) \iff f(x+h) \leq \frac{\Delta F}{\Delta x}(x) \leq f(x).$$



f étant une fonction continue, $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$ et dans les deux cas, d'après le théorème

des gendarmes (voir chapitre A1 p. 13), on conclut que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}(x) = f(x)$.

Voir l'exercice 77 p. 203 pour le cas où f est une fonction décroissante.

2. Primitives d'une fonction continue

■ DÉFINITION

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I .

Une **primitive** de f sur I est une fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.



REMARQUE : On dit que F est *une* primitive de f et non pas *la* primitive de f car une fonction admettant une primitive n'en admet pas une seule, comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple Soit $f : x \mapsto 2x$ définie sur \mathbb{R} . Alors $F_1 : x \mapsto x^2$ est une primitive de f sur \mathbb{R} . De même, $F_2 : x \mapsto x^2 + 1$ est aussi une primitive de f sur \mathbb{R} . On a $F_1' = F_2' = f$.

■ THÉORÈME : Existence de primitives

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

PREUVE On démontre ce théorème dans le cas où I est un intervalle fermé $[a; b]$ et on admettra pour cela le résultat suivant : « toute fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ est bornée et atteint ses bornes ».

Soit f une fonction continue sur I et notons m son minimum. La fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - m$ est alors continue et positive sur I . D'après le théorème précédent, la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x \varphi(t) dt$ est définie et dérivable sur I et on a, pour tout $x \in I$: $\Phi'(x) = \varphi(x) = f(x) - m$.

Étant donné que l'on cherche une fonction F , définie et dérivable sur I telle que $F' = f$, la fonction $F : x \mapsto \Phi(x) + mx$ est une candidate idéale : elle est définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $F'(x) = \Phi'(x) + m = f(x)$.

■ THÉORÈME : Lien entre les primitives

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I . Alors f admet une infinité de primitives sur I qui sont toutes de la forme

$$x \mapsto F(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

PREUVE

- Démontrons d'abord que toutes les primitives ont bien la forme annoncée. Soit G une primitive de f sur I . Alors $G' = f = F'$ et donc $G' - F' = 0$.

La fonction $G - F$, de dérivée nulle, est donc une fonction constante sur I : il existe alors un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $G(x) - F(x) = k$, soit $G(x) = F(x) + k$.

- Vérifions maintenant que toutes les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + k$, avec k réel, sont bien des primitives de f . Soit $k \in \mathbb{R}$ et $G : x \mapsto F(x) + k$ définie sur I . Alors G est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $G'(x) = F'(x) = f(x)$: G est donc bien une primitive de f sur I .

■ PROPRIÉTÉ : Condition d'unicité de la primitive

Soient $x_0 \in I$ et y_0 deux réels donnés. Parmi toutes les primitives d'une fonction f définie et continue sur I , il en existe une seule qui vérifie la condition $F(x_0) = y_0$.

PREUVE

- **Existence** : soit G une primitive de f sur I et considérons $F : x \mapsto G(x) - G(x_0) + y_0$, définie sur I . Alors F est aussi une primitive de f sur I et de plus, $F(x_0) = y_0$.
- **Unicité** : notons F et G deux primitives de f sur I telles que $F(x_0) = G(x_0) = y_0$ et démontrons que $F(x) = G(x)$ pour tout $x \in I$. Comme F et G sont deux primitives de f , il existe, d'après le théorème précédent, un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $F(x) = G(x) + k$. En particulier, pour $x = x_0$, on obtient $k = 0$ et par conséquent $F = G$ sur I .

REMARQUE : Pour tout $x_0 \in I$, $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$ est donc la primitive de f sur I s'annulant en x_0 . En effet, F est bien une primitive de f sur I et c'est la seule vérifiant la condition $F(x_0) = 0$.

MÉTHODE 1 Utiliser les propriétés élémentaires des primitives

► Ex. 20 p. 196

Exercice d'application Soient φ et ψ les fonctions définies sur $[1; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \int_1^x t^2 dt \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{x^3}{3}.$$

- 1) a) Démontrer que φ et ψ sont deux primitives sur $[1; +\infty[$ d'une même fonction f que l'on précisera.
b) En déduire la relation qu'il existe entre φ et ψ .
- 2) Déterminer la primitive F de f telle que $F(1) = 3$.

Correction

- 1) a) $f : t \mapsto t^2$ est continue et positive sur $[1; +\infty[$ donc d'après le théorème p. 184, φ est définie et dérivable sur $[1; +\infty[$ et on a $\varphi' = f$. De plus, pour tout $x \geq 1$, $\psi'(x) = x^2$.
b) ψ est une primitive de f sur $[1; +\infty[$ donc φ est de la forme $\varphi(x) = \psi(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$ pour tout $x \geq 1$. En particulier, $\varphi(1) = \psi(1) + k$ et donc $0 = \frac{1}{3} + k$, c'est-à-dire $k = -\frac{1}{3}$. On en déduit alors que pour tout $x \geq 1$, $\varphi(x) = \psi(x) - \frac{1}{3}$.
- 2) Les primitives de f sur $[1; +\infty[$ sont donc de la forme $F : x \mapsto \frac{x^3}{3} + k$, $k \in \mathbb{R}$.
 $F(1) = 3$ donc $\frac{1}{3} + k = 3$ donc $k = \frac{8}{3}$ et ainsi $F(x) = \frac{x^3 + 8}{3}$ pour tout réel $x \geq 1$.

PROPRIÉTÉ : Calcul pratique d'une intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{que l'on note aussi} \quad [F(x)]_a^b.$$

PREUVE Introduisons la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ de sorte que $\int_a^b f(t) dt = \Phi(b)$.

Φ et F étant deux primitives de f sur $[a; b]$, on en déduit d'après le théorème précédent qu'il existe un réel k tel que $\Phi(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in [a; b]$.

Ainsi, $\Phi(b) = F(b) + k$. Il nous reste à calculer k : en remarquant que $\Phi(a) = 0$, il vient que $F(a) = -k$ et ainsi, $\Phi(b) = F(b) - F(a)$.

Exemple On souhaite calculer $\int_0^1 x^2 dx$. Pour cela, posons $f : x \mapsto x^2$, définie sur $[0; 1]$.

En remarquant que $F : x \mapsto \frac{x^3}{3}$ est une primitive de f sur $[0; 1]$, on obtient :

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

■ PROPRIÉTÉ : Primitives des fonctions usuelles

Fonction f définie par	Une primitive F définie par	Domaine de validité
$f(x) = k, k \in \mathbb{R}$	$F(x) = kx$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$F(x) = -\frac{1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}}$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	\mathbb{R}
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$	\mathbb{R}
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$	\mathbb{R}

MÉTHODE 2 Déterminer des primitives simples sur un intervalle donné

► Ex. 26 p. 197

- Commencer par identifier le type de la fonction f ainsi que le type de primitive.
- Dériver ce type de primitive.
- Ajuster les coefficients, en fonction du résultat précédent puis écrire les primitives.

Exercice d'application

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

- $f(x) = x^2$ sur \mathbb{R}
- $g(x) = \frac{6}{x^3}$ sur $] -\infty; 0[$
- $h(x) = \frac{1}{2x}$ sur $]0; +\infty[$

Correction

- f est une fonction de degré 2, continue sur \mathbb{R} , une primitive sera donc de degré 3.

Or $(x^3)' = 3x^2$.

On écrit alors $f(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2$ et les primitives de f sur \mathbb{R} sont définies par :

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k, k \in \mathbb{R}.$$

- g est du type $\frac{1}{x^3}$, continue sur $] -\infty; 0[$, une primitive sera donc du type $\frac{1}{x^2}$.

Or, $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$.

On écrit alors $g(x) = (-3) \times \frac{-2}{x^3}$ et les primitives de g sur $] -\infty; 0[$ sont définies par :

$$G(x) = -\frac{3}{x^2} + k, k \in \mathbb{R}.$$

- h est du type $\frac{1}{x}$, continue sur $]0; +\infty[$, une primitive sera donc du type $\ln(x)$.

Or, $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

On écrit alors $h(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x}$ et les primitives de h sur $]0; +\infty[$ sont définies par :

$$H(x) = \frac{\ln(x)}{2} + k, k \in \mathbb{R}.$$

■ PROPRIÉTÉ : Primitives et opérations sur les fonctions

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Fonction	Une primitive	Domaine de validité
$f = u' + v'$	$F = u + v$	$x \in I$
$f = u' u^n, n \in \mathbb{N}$	$F = \frac{1}{n+1} u^{n+1}$	$x \in I$
$f = \frac{u'}{u^n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$F = -\frac{1}{n-1} \frac{1}{u^{n-1}}$	$x \in I$ tel que $u(x) \neq 0$
$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln(u)$	$x \in I$ tel que $u(x) > 0$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$	$x \in I$ tel que $u(x) > 0$
$f = u' e^u$	$F = e^u$	$x \in I$

MÉTHODE 3 Déterminer des primitives sur un intervalle donné

► Ex. 29 p. 197

- Commencer par identifier le type de f , la fonction u , ainsi que le type de primitive.
- Dériver ce type de primitive.
- Ajuster les coefficients, en fonction du résultat précédent puis écrire les primitives.

Exercice d'application

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné.

- $f(x) = (2x - 1)^3$ sur \mathbb{R}
- $g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ sur $]1; +\infty[$
- $h(x) = \frac{1}{(2x - 1)^2}$ sur $I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$

Correction

- f est du type $u' u^3$ avec $u : x \mapsto 2x - 1$ définie sur \mathbb{R} , une primitive sera donc du type u^4 .

$$\text{Or, } \left((2x - 1)^4 \right)' = 4 \times 2 \times (2x - 1)^3 = 8(2x - 1)^3.$$

On écrit alors $f(x) = \frac{1}{8} \times 8(2x - 1)^3$ et les primitives de f sur \mathbb{R} sont définies par :

$$F(x) = \frac{1}{8} (2x - 1)^4 + k, k \in \mathbb{R}.$$

- g est du type $\frac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto x^2 - 1, u(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$, une primitive sera donc du type $\ln(u)$.

Or, $\left(\ln(x^2 - 1) \right)' = \frac{2x}{x^2 - 1}$. On écrit alors $g(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2 - 1}$ et les primitives de g sur $]1; +\infty[$ sont définies par :

$$G(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) + k, k \in \mathbb{R}.$$

- h est du type $\frac{u'}{u^2}$ avec $u : x \mapsto 2x - 1, u(x) \neq 0$ sur I , une primitive sera donc du type $\frac{1}{u}$.

Or, $\left(\frac{1}{2x - 1} \right)' = -\frac{2}{(2x - 1)^2}$. On écrit alors $h(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{-2}{(2x - 1)^2}$ et les primitives de h sur I sont définies par :

$$H(x) = -\frac{1}{2(2x - 1)} + k, k \in \mathbb{R}.$$



3. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

On a vu au paragraphe précédent que, pour une fonction continue et positive sur $[a; b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

où F est une primitive de f sur $[a; b]$. On étend cette propriété aux fonctions de signe quelconque, continues sur un intervalle $[a; b]$ avec la définition ci-dessous.

■ DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et de signe quelconque et F une primitive de f sur $[a; b]$. On pose :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Exemple On souhaite calculer $\int_{-1}^2 (x^2 - 2) dx$. Pour cela, on pose $f : x \mapsto x^2 - 2$ définie sur $I = [-1; 2]$. Une primitive de f sur I est $F : x \mapsto \frac{x^3}{3} - 2x$ et on obtient alors :

$$\int_{-1}^2 (x^2 - 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x \right]_{-1}^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 4 \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + 2 \right) = -3.$$

REMARQUES :

- Pour toute fonction f continue en a , $\int_a^a f(t) dt = F(a) - F(a) = 0$.
- Pour toute fonction f continue sur $[a; b]$, $\int_b^a f(t) dt = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(t) dt$.

■ PROPRIÉTÉ : Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ et λ un réel. Alors :

$$\int_a^b (f + g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt. \quad \blacksquare \quad \int_a^b (\lambda f)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt.$$

■ **PREUVE** Voir exercice 78 p. 203.

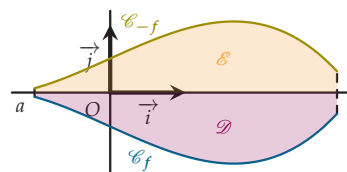
■ PROPRIÉTÉ : Fonction négative et aire

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a; b]$. Alors, l'aire du domaine situé entre \mathcal{C}_f et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a; b]$ est $-\int_a^b f(x) dx$.

■ **PREUVE** On note \mathcal{D} le domaine situé entre \mathcal{C}_f et l'axe des abscisses, sur $[a; b]$.

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire de \mathcal{D} est égale à l'aire du domaine \mathcal{E} , compris entre la courbe de $-f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a; b]$. Ainsi :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \mathcal{A}_{\mathcal{E}} = \int_a^b (-f)(x) dx = -\int_a^b f(x) dx.$$





MÉTHODE 4 Utiliser la linéarité de l'intégrale

► Ex. 53 p. 199

Exercice d'application Soient $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$.

- 1) Pourquoi ne peut-on pas calculer directement I ou J ?
- 2) Calculer $I + J$ et $I - J$.
- 3) En déduire les valeurs respectives de I et J .

Correction

- 1) Aucune des deux fonctions $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$ et $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$ ne correspondent à des dérivées connues et, bien qu'elles soient continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on ne peut pas en donner immédiatement des primitives.
- 2) Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

De même :

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx.$$

On reconnaît ici une dérivée de la forme $\frac{u'}{u}$, au signe près, puisque la dérivée de la fonction $u : x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$ est $u' : x \mapsto \cos(x) - \sin(x)$. Ainsi, étant donné que u est bien positive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$I - J = - \left[\ln(\sin(x) + \cos(x)) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

- 3) On doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} I + J = \frac{\pi}{2} \\ I - J = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2I = \frac{\pi}{2} \\ I = J \end{cases} \iff I = J = \frac{\pi}{4}$$

PROPRIÉTÉ : Relation de Chasles

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c , trois réels appartenant à I . Alors :

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

PREUVE f étant une fonction continue sur I , elle admet une primitive sur cet intervalle. Notons F une primitive de f sur I .

Pour démontrer l'égalité annoncée, calculons séparément chaque membre de l'égalité :

- $\int_a^c f(x) dx = F(c) - F(a)$ par définition.
- $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a)$ toujours par définition puis en réduisant l'expression obtenue.

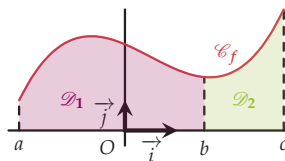
L'égalité annoncée est donc vraie.



REMARQUE :

Lorsque f est positive et continue sur $[a; c]$ et que $b \in [a; c]$, la relation de Chasles est la simple traduction de l'additivité des aires de deux domaines adjacents :

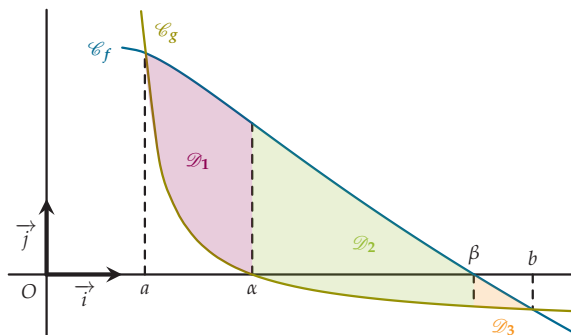
$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}_1} + \mathcal{A}_{\mathcal{D}_2} = \mathcal{A}_{\text{totale}}.$$



PROPRIÉTÉ

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ telles que $f \geq g$. Alors, l'aire du domaine compris entre les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sur $[a; b]$ est donnée par $\int_a^b (f - g)(x) dx$.

PREUVE On distingue trois cas, selon que les fonctions sont toutes les deux positives, de signes contraires ou toutes les deux négatives :



- Premier cas.

L'aire de \mathcal{D}_1 est la différence entre l'aire du domaine compris entre \mathcal{C}_f et l'axe des abscisses et l'aire du domaine compris entre \mathcal{C}_g et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a; \alpha]$:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}_1} = \int_a^\alpha f(x) dx - \int_a^\alpha g(x) dx = \int_a^\alpha (f - g)(x) dx.$$

- Deuxième cas.

L'aire de \mathcal{D}_2 est la somme de l'aire du domaine compris entre \mathcal{C}_f et l'axe des abscisses et de l'aire du domaine compris entre \mathcal{C}_g et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[\alpha; \beta]$:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}_2} = \int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_\alpha^\beta (-g)(x) dx = \int_\alpha^\beta (f - g)(x) dx.$$

- Troisième cas.

L'aire de \mathcal{D}_3 est la différence entre l'aire du domaine compris entre \mathcal{C}_g et l'axe des abscisses et l'aire du domaine compris entre \mathcal{C}_f et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[\beta; b]$:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}_3} = \int_\beta^b (-g)(x) dx - \int_\beta^b (-f)(x) dx = \int_\beta^b (f - g)(x) dx.$$

On conclut en utilisant la relation de Chasles, puisque l'aire totale est la somme des aires des trois domaines.



MÉTHODE 5 Calculer une aire entre deux courbes

► Ex. 60 p. 200

- Commencer par étudier sur I les positions relatives des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g puis décomposer l'intervalle I en sous-intervalles sur lesquels $f - g$ garde un signe constant.
- Sur chaque sous intervalle, calculer, selon les cas, l'intégrale de $f - g$ ou de $g - f$.

Exercice d'application Soient $f : x \mapsto x^2 - 4$ et $g : x \mapsto (x + 2)(x - 2)(x + 1)$ définies sur \mathbb{R} . Déterminer l'aire, en u.a., du domaine compris entre les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , sur l'intervalle $[-2; 2]$.

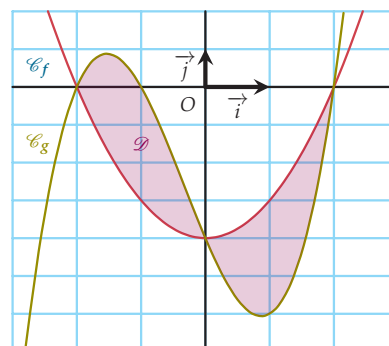
Correction

- On calcule la différence $f(x) - g(x) = x^2 - 4 - (x + 2)(x - 2)(x + 1)$ et en factorisant, on a : $f(x) - g(x) = (x^2 - 4)(1 - x - 1) = -x(x^2 - 4)$.

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	-2	0	2
$x^2 - 4$	0	-	0
$-x$		+	-
$f(x) - g(x)$	0	-	+

On décompose donc l'intervalle $I = [-2; 2]$ en deux sous-intervalles $I_1 = [-2; 0]$ et $I_2 = [0; 2]$ sur lesquels on intègre respectivement $g - f$ et $f - g$.



- Ainsi, $\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \int_{-2}^0 x(x^2 - 4) dx + \int_0^2 -x(x^2 - 4) dx = \left[\frac{(x^2 - 4)^2}{4} \right]_{-2}^0 - \left[\frac{(x^2 - 4)^2}{4} \right]_0^2$.

D'une part, $\left[\frac{(x^2 - 4)^2}{4} \right]_{-2}^0 = \frac{(-4)^2}{4} - \frac{0^2}{4} = 4$.

D'autre part, $\left[\frac{(x^2 - 4)^2}{4} \right]_0^2 = \frac{0^2}{4} - \frac{(-4)^2}{4} = -4$.

Ainsi, $\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = 8$ u.a.

PROPRIÉTÉ : Intégrales et inégalités

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$. Alors :

- Si f est positive sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
- Si pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

PREUVE Voir exercice 79 p. 203.

REMARQUES : Les réciproques de chacun des points de cette propriétés sont fausses.

- Par exemple $\int_0^2 (x^2 - 1) dx = \frac{2}{3}$ mais pourtant, la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ n'est pas positive sur $[0; 2]$: l'image de 0 est -1 .
- De même, $\int_0^2 1 dx \leq \int_0^2 x^2 dx$ puisque $2 \leq \frac{8}{3}$ mais la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas toujours supérieure à 1 sur $[0; 2]$.



MÉTHODE 6 Encadrer une intégrale

► Ex. 65 p. 201

Exercice d'application Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$ définie sur \mathbb{R} .

Pour tout réel $a \geq 1$, on s'intéresse à l'intégrale $F(a) = \int_1^a f(x) dx$.

- 1) Démontrer que pour tout réel $x \geq 1$, $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$.
- 2) En déduire que pour tout réel $a \geq 1$, $0 \leq F(a) \leq e^{-1}$.

Correction

- 1) Une exponentielle étant toujours positive, $f(x) \geq 0$ pour tout réel x et donc en particulier pour tout $x \geq 1$. De plus, si $x \geq 1$, alors $x \leq x^2$, c'est-à-dire $-x \geq -x^2$ et donc $e^{-x} \geq f(x)$ par croissance de la fonction exponentielle.

On en déduit donc que pour tout réel $x \geq 1$, $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$.

- 2) À partir de l'inégalité obtenue, on utilise (deux fois) le second point de la propriété précédente sur l'intervalle $[1; a]$ et ainsi :

$$\int_1^a 0 dx \leq \int_1^a f(x) dx \leq \int_1^a e^{-x} dx \iff 0 \leq F(a) \leq [-e^{-x}]_1^a.$$

Cette dernière quantité est égale à $-e^{-a} + e^{-1} \leq e^{-1}$, ce qui démontre l'inégalité voulue.

■ DÉFINITION : Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. La valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est le nombre μ défini par :

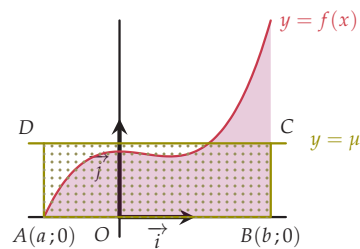
$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

REMARQUE :

Dans le cas où f est positive et continue sur $[a; b]$, la valeur moyenne de f entre a et b représente la hauteur du rectangle construit sur l'intervalle $[a; b]$.

L'aire du rectangle $ABCD$ est égale, en u.a., à l'aire du domaine coloré car d'après la définition :

$$\mu(b-a) = \int_a^b f(t) dt.$$



Exemple Pour connaître la valeur moyenne de $t \mapsto \sin(t)$ sur $[0; \pi]$, on calcule :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t) dt = \frac{1}{\pi} [-\cos(x)]_0^{\pi} = \frac{-\cos(\pi) + \cos(0)}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

REMARQUES :

- En mathématiques, si f est une fonction non constante, la valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est la valeur de la fonction constante ayant la même intégrale que f sur $[a; b]$.
- En physique, si f est une fonction qui représente une intensité variable, la valeur moyenne de f entre deux instants t_1 et t_2 est l'intensité du courant constant transportant la même quantité d'électricité que le courant variable entre t_1 et t_2 .