Cours sur les probabilités conditionnelles et l'indépendance

Cours - Méthodes

Dans tout ce chapitre, Ω désigne un univers, A et B deux évènements de Ω et P une probabilité sur Ω.

1. Probabilités conditionnelles et arbres pondérés

A. Probabilités conditionnelles

DÉFINITION

Si $P(A) \neq 0$, **la probabilité de** B **sachant** A, notée $P_A(B)$, est définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

REMARQUE : Si $P(B) \neq 0$, on a de manière symétrique :

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Exemple Dans un lycée, on demande aux élèves et aux professeurs s'ils préfèrent avoir cours le matin ou l'après-midi.
On obtient les résultats donnés dans le tableau ci-dessous :

	Matin	Après-midi	Total
Élèves	657	438	1 095
Professeurs	84	21	105
Total	741	459	1 200

On choisit une personne au hasard (parmi élèves et professeurs) et on note :
- E l'évènement : « La personne tirée au sort est un élève » ;
- M l'évènement : « La personne tirée au sort préfère avoir cours le matin ».

1) Calculer $P(E)$ et $P(E \cap M)$.
2) En déduire $P_E(M)$ avec la formule de la définition précédente.
3) Retrouver ce résultat sans utiliser la formule du cours.

Correction

1) On est dans une situation d'équiprobabilité donc :
   - $P(E) = \dfrac{1\,095}{1\,200} = 0{,}912\,5$;
   - $P(E \cap M) = \dfrac{657}{1\,200} = 0{,}547\,5$.
2) On en déduit que $P_E(M) = \dfrac{P(E \cap M)}{P(E)} = \dfrac{0{,}547\,5}{0{,}912\,5} = 0{,}6$.
3) $P_E(M)$ est « la probabilité que la personne tirée au sort préfère avoir cours le matin sachant que c'est un élève », cette probabilité peut donc être obtenue en calculant $\dfrac{657}{1\,095} = 0{,}6$.

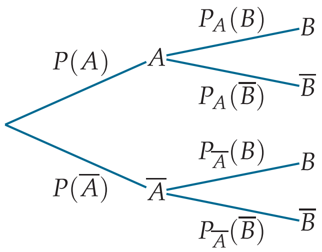
B. Application aux arbres pondérés

PROPRIÉTÉ

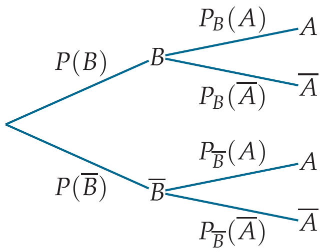
Les principales règles de construction des **arbres pondérés** (ou **arbres probabilistes**) sont :
- la somme des probabilités des évènements (disjoints) correspondant aux branches partant d'un même nœud est 1 ;
- les probabilités présentes sur les 2e, 3e, etc. branches d'un chemin sont des probabilités conditionnelles.

REMARQUES :

- Dans le cas de deux évènements A et B de probabilités non nulles, on a :

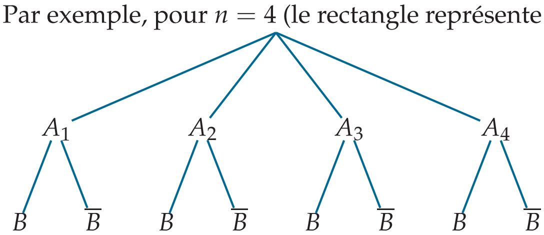


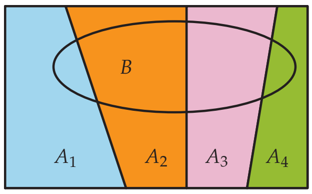
ou



C'est le contexte qui induira de représenter la situation par un arbre ou l'autre.

- Le premier point illustre le fait que les évènements A_1, A_2, ...et A_n correspondant aux branches partant du premier nœud sont des évènements disjoints, de probabilités non nulles et tels que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.
  On dit alors que A_1, A_2, ...et A_n forment une **partition de l'univers** Ω.
  Par exemple, pour $n = 4$ (le rectangle représente l'univers) :





PROPRIÉTÉ

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$.

Cette formule permet de justifier l'une des règles d'utilisation des arbres pondérés :
la probabilité de l'évènement correspondant à un chemin de l'arbre est le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.

MÉTHODE 1 Représenter une situation à l'aide d'un arbre pondéré

► Ex. 6 p. 338

Exercice d'application

Sur l'étal d'un maraîcher, il y a 3/4 de légumes rouges et le reste de légumes verts.

- Parmi les légumes rouges 30 % sont des poivrons et 70 % sont des tomates.
- Parmi les légumes verts 80 % sont des poivrons et 20 % sont des tomates.

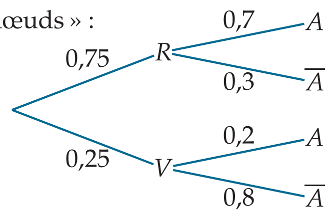
On choisit un légume au hasard sur l'étal et on considère les évènements :

- A : « le légume choisi est une tomAte » ;
- R : « le légume choisi est Rouge » ;
- V : « le légume choisi est Vert ».

1) Représenter la situation par un arbre.
2) Calculer $P(R \cap A)$.

Correction

1) Pour le premier nœud, les deux possibilités sont R : « le légume choisi est rouge » et son évènement contraire $\overline{R} = V$: « le légume choisi est vert ».
Il reste ensuite à distinguer tomates et poivrons pour les « deuxièmes nœuds » :



Comme l'évènement « le légume choisi est un poivron » n'est pas nommé par une lettre, on a utilisé $\overline{A}$ pour le représenter dans l'arbre mais on aurait aussi pu introduire une nouvelle notation.

2) $P(R \cap A) = P(R) \times P_R(A) = 0{,}75 \times 0{,}7 = 0{,}525$.

C. Formule des probabilités totales

PROPRIÉTÉ : Formule des probabilités totales

- Si $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$ alors $P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$
$= P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)$.
- D'une manière plus générale, si A_1, A_2, ... et A_n forment une partition de Ω, c'est-à-dire sont n évènements disjoints, de probabilités non nulles et tels que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ alors
$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B). \end{aligned}$$

PREUVE Pour le 1er point :
Les évènements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont disjoints et $B = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ donc $P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$: on en déduit que $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)$ de la propriété précédente.

PROPRIÉTÉ

La formule des probabilités totales permet de justifier une autre règle d'utilisation des arbres pondérés :
la probabilité d'un évènement est la somme des probabilités associées aux chemins qui permettent de réaliser cet évènement.

MÉTHODE 2 Utiliser la formule des probabilités totales

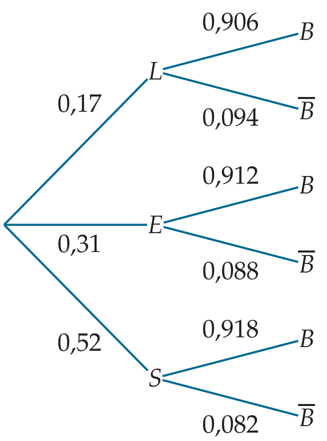
► Ex. 21 p. 340

Exercice d'application En 2015, la répartition des élèves ayant passé le baccalauréat général en France métropolitaine et dans les DOM est : 17 % d'élèves de la filière L, 31 % d'élèves de la filière ES et 52 % d'élèves de la filière S.
Par ailleurs, les taux de réussite dans ces filières sont 90,6 % en L, 91,2 % en ES et 91,8 % en S.

On tire au hasard un élève ayant passé le bac général en 2015.
1) Dresser un arbre pondéré représentant la situation.
2) Quelle est la probabilité que la personne tirée au hasard ait obtenu le bac ?
3) Déterminer $P_{\overline{B}}(S)$.

Correction

1) On obtient l'arbre ci-contre où :
- L est l'évènement : « la personne a passé le bac L » ;
- E est l'évènement : « la personne a passé le bac ES » ;
- S est l'évènement : « la personne a passé le bac S » ;
- B est l'évènement : « la personne a obtenu le bac ».



2) La formule des probabilités totales donne
$$\begin{aligned} P(B) &= P(L) \times P_L(B) + P(E) \times P_E(B) + P(S) \times P_S(B) \\ &= 0{,}17 \times 0{,}906 + 0{,}31 \times 0{,}912 + 0{,}52 \times 0{,}918 \\ &= 0{,}914\,1. \end{aligned}$$

3) On sait que $P_{\overline{B}}(S) = \dfrac{P\left(\overline{B} \cap S\right)}{P\left(\overline{B}\right)}$ or :
- $P\left(\overline{B} \cap S\right) = P(S) \times P_S\left(\overline{B}\right) = 0{,}52 \times 0{,}082 = 0{,}042\,64$;
- $P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}914\,1 = 0{,}085\,9$.

On en déduit donc que $P_{\overline{B}}(S) = \dfrac{0{,}042\,64}{0{,}085\,9} \approx 0{,}496$.

2. Indépendance de deux évènements

DÉFINITION

On dit que A et B sont **indépendants** si, et seulement si, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

REMARQUE : Attention à ne pas confondre indépendant et incompatible (qui est synonyme de disjoint c'est-à-dire que $A \cap B = \varnothing$ et non pas $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$).

Exemple Dans la population, il y a 71 % de porteurs de lunettes parmi lesquels 37 % ont 55 ans ou plus. Dans la population, il y a 63 % de personnes de moins de 55 ans.
On tire au sort une personne dans la population et on considère les deux évènements :

- A : « la personne a 55 ans ou plus » ;
- L : « la personne porte des lunettes ».

Les évènements A et L sont-ils indépendants ?

Correction D'après l'énoncé, $P(L) = 0{,}71$; $P(A) = 1 - 0{,}63 = 0{,}37$ et $P_L(A) = 0{,}37$ donc $P(A) \times P(L) = 0{,}37 \times 0{,}71 = 0{,}262\,7$ et $P(A \cap L) = P(L) \times P_L(A) = 0{,}71 \times 0{,}37 = 0{,}262\,7$.
Comme $P(A) \times P(L) = P(A \cap L)$, on en déduit que A et L sont indépendants.

PROPRIÉTÉ

Si $P(A) \neq 0$ (ou $P(B) \neq 0$) alors A et B sont indépendants si, et seulement si, $P_A(B) = P(B)$ (ou $P_B(A) = P(A)$).

PREUVE Pour A tel que $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si, et seulement si :
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow P(A) \times P_A(B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$ car $P(A) \neq 0$.

REMARQUES :

- $P_A(B) = P(B)$ traduit le fait que savoir que A est réalisé ne modifie pas la probabilité de B, autrement dit, que la réalisation de A n'a pas d'influence sur la réalisation de B.
- Dans l'exemple précédent, on aurait pu conclure directement puisque $P(A) = P_L(A)$.

PROPRIÉTÉ :

ROC

Si A et B sont deux évènements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont également indépendants.

PREUVE Pour A et B indépendants, il s'agit de montrer que $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P\left(\overline{A}\right) \times P(B)$.

Notons préalablement que $P(B) = P\left(\overline{A} \cap B\right) + P(A \cap B)$ d'après la formule des probabilités totales donc $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B)$.

Comme A et B sont indépendants, on a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ donc, d'après ce qui précède, $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) = (1 - P(A)) \times P(B) = P\left(\overline{A}\right) \times P(B)$: $\overline{A}$ et B sont bien indépendants.

Exemple Dans l'exemple précédent, les événements A : « la personne a 55 ans ou plus » et $\overline{L}$: « la personne ne porte pas de lunettes » sont donc également indépendants.

REMARQUES :

- Plus généralement, si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants et A et $\overline{B}$ sont indépendants.
- Quand on considère un schéma de Bernoulli, on a des tirages indépendants.
  Cela veut dire que le fait qu'un tirage soit réussi ou non n'a pas d'influence sur le fait que le suivant soit réussi ou non : c'est pour cela que les probabilités (conditionnelles) de réussite ou d'échec sur toutes les branches sont les mêmes.