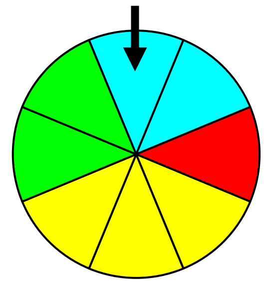
Probabilités

PROBABILITES

I. Expérience aléatoire

1) Exemples :



- On lance une pièce de monnaie et on regarde la face supérieure.
- On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
- On fait tourner une roue marquée sur ses secteurs de couleurs différentes et on regarde le secteur marqué par la flèche.

Définitions :
Une expérience *(lancé un dé par exemple)* est aléatoire lorsqu'elle a plusieurs résultats ou issues *(1, 2, 3, 4, 5 ou 6)* et que l'on ne peut pas prévoir, à priori, quel résultat se produira.

2) Réalisons une expérience aléatoire :

Chaque élève lance 100 fois un dé à six faces et note les effectifs d'apparition de chaque face dans le tableau :

Faces	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***Total***
Effectifs	20	14	10	22	16	18	100

On regroupe ensuite l'ensemble des résultats de la classe dans un même tableau puis on calcule les fréquences d'apparition de chaque face.

Faces	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***Total***
Effectifs	434	456	443	459	435	473	2700
Fréquences	16,1%	16,9%	16,4%	17%	16,1%	17,5%	100

Les fréquences d'apparition sont très proches les unes des autres.

Théoriquement, il y a autant de chance d'obtenir un 1, un 2, … ou un 6.
En effectuant un nombre encore plus grand de lancers, les fréquences se rapprocheraient les unes des autres de façon encore plus évidente.

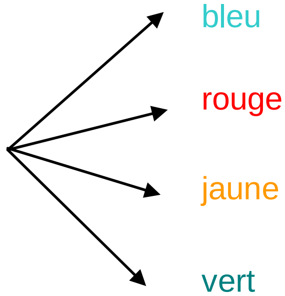
La suite de la leçon nous expliquera comment calculer les fréquences théoriques d'une expérience aléatoire.

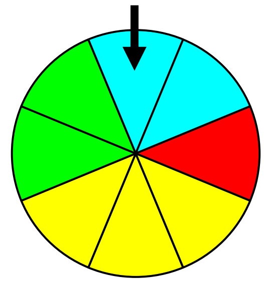
II. Probabilité d’un évènement

1) Arbre des possibles

Exemple :

Lorsqu’on fait tourner la roue, quatre issues sont possibles. On le schématise sur l’arbre des possibles :





Définition :
L’arbre des possibles permet de visualiser les issues d’une expérience aléatoire.

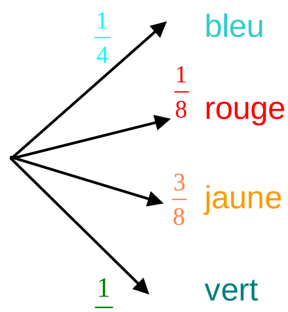
2) Probabilité

Définition :
Les fréquences obtenues d’un événement ***E*** se rapprochent d’une valeur théorique lorsque le nombre d’expérience augmente (Loi des grands nombres). Cette valeur s’appelle la probabilité de l’événement ***E***.

Exemple :
2 secteurs sur 8 sont de couleur bleue. Lors d’une expérience aléatoire, il y a donc 2 chances sur 8 d’obtenir un secteur de couleur bleue.

On dit que la probabilité d’obtenir un secteur bleu est égale à $\frac{2}{8}$, soit $\frac{1}{4}$.

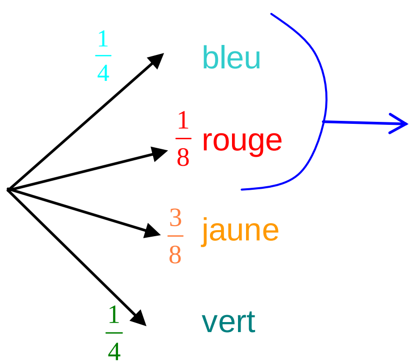
On inscrit sur l’arbre des possibles les probabilités des différentes issues.



3) Evènement

Exemple :

Soit l’évènement ***E*** « La roue s’arrête sur un secteur bleu ou rouge ».
On pourrait se demander qu’elle est la probabilité que cet évènement se réalise ?



E se réalise : $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

On dit que la probabilité que l'évènement ***E*** se réalise est égale à $\frac{3}{8}$ et on note :

P(***E***) = $\frac{3}{8}$.

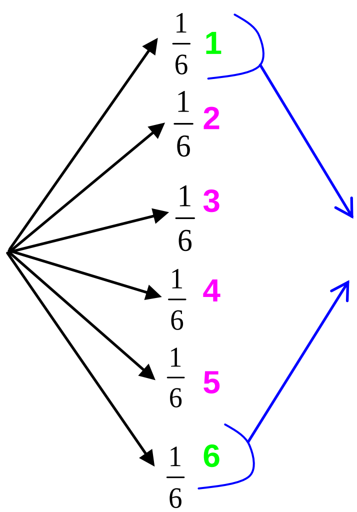
<u>Définitions :</u>
- Un <u>évènement</u> est constitué de plusieurs issues d'une même expérience aléatoire.
- Les <u>événements élémentaires</u> sont les événements réduits à une unique issue de l'expérience.

Dans l'exemple, « La roue s'arrête sur un secteur bleu ou rouge » est un évènement.
« La roue s'arrête sur un secteur bleu » est un évènement élémentaire.

<u>Méthode : Calculer une probabilité en utilisant un arbre des possibles</u>

On considère l'expérience aléatoire suivante :
On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
Soit ***E*** l'évènement : « La face du dessus est un 1 ou un 6 ».
Quelle est la probabilité que l'évènement ***E*** se réalise ?

On construit l'arbre des possibles de l'expérience aléatoire :
Chaque issue à la même probabilité : il y a une chance sur six de sortir un 1, un 2, … ou un 6.
On dit qu'il y a <u>**équiprobabilité**</u>.



$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ainsi P(***E***) = $\frac{1}{3}$

La probabilité que l'évènement ***E*** se réalise est de $\frac{1}{3}$.

Il y a donc une chance sur trois d'obtenir un 1 ou un 6 en lançant un dé.

<u>Propriétés :</u>
1) La probabilité P(***E***) d'un événement ***E*** est telle : $0 \leq$ P(***E***) ≤ 1.
2) La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.
3) La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

4) Evènement contraire

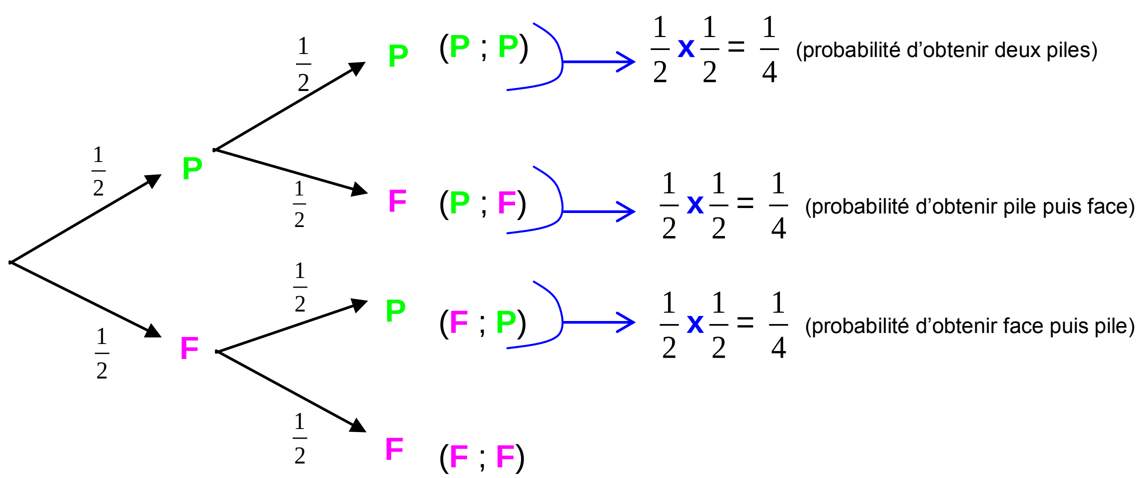
Exemple :
On considère l'expérience aléatoire suivante :
On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
Soit ***E*** l'évènement : « La face du dessus est un 1 ou un 6 ».
Alors l'évènement contraire de ***E*** est : « La face du dessus est un 2, un 3, un 4 ou un 5 ». Cet évènement est noté $\overline{E}$.

Propriété :
La probabilité de l'événement contraire d'un événement ***E*** est : $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

5) Exemple d'une expérience aléatoire à deux épreuves

Méthode : Calculer une probabilité d'une expérience à deux épreuves

Lancer deux fois de suite une pièce de monnaie est une expérience aléatoire à deux épreuves.
Soit ***E*** l'évènement : « On obtient au moins une fois la face PILE. »



Sur un même chemin, on multiplie les probabilités.

$P(E) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

La probabilité que l'évènement ***E*** se réalise est de $\frac{3}{4}$.

Il y a donc trois chances sur quatre d'obtenir au moins une fois la face PILE lorsqu'on lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

III. Réunion et intersection de deux événements

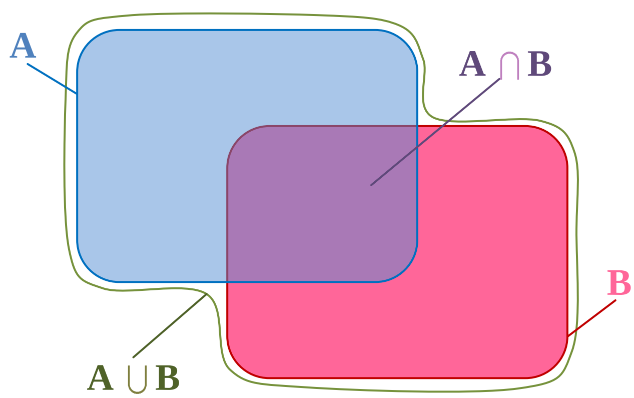
1) Définitions

Exemple :
On considère l'expérience aléatoire suivante :
On tire une carte dans un jeu de 32 cartes à jouer.
On considère les événements suivants :
A : « On tire un valet »
B : « On tire un cœur ou un carreau »

L'intersection des évènements A et B est l'évènement :
« On tire le valet de cœur ou le valet de carreau ». On note cet évènement $A \cap B$ et on lit « A inter B »

La réunion des évènements A et B est l'évènement :
« On tire le valet de piques, le valet de trèfle, un cœur ou un carreau ». On note cet évènement $A \cup B$ et on lit « A union B »

Définitions :
L'événement "A et B", noté $A \cap B$, est réalisé lorsque les deux événements A et B sont simultanément réalisés.
L'événement "A ou B", noté $A \cup B$, est réalisé lorsqu'au moins l'un des deux événements est réalisé.



2) Probabilité d'une réunion

Théorème :
Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire, alors :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Méthode : Calcul de probabilité en utilisant la formule de probabilité d'une réunion

On considère l'expérience aléatoire suivante :
On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
On considère les événements suivants :
A : « On obtient un nombre impair »
B : « On obtient un multiple de 3 »
Calculer la probabilité de l'évènement $A \cup B$.

$P(\mathrm{A})=\frac{1}{2}$ et $P(\mathrm{B})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

A $\cap$ B est l'événement élémentaire : « On obtient un 3 », donc : $P(A \cap B)=\frac{1}{6}$

L'événement A $\cup$ B a donc pour probabilité :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) &= p(\mathrm{A})+p(\mathrm{B})-p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \\ &=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6} \\ &=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6} \\ &=\frac{4}{6} \\ &=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

3) Evénements incompatibles

Définition :
On dit que deux événements A et B sont incompatibles si A $\cap$ B = $\varnothing$.

Propriété :
Si deux événements A et B sont incompatibles alors $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})$.

Exemple :
On considère l'expérience aléatoire suivante :
On tire une carte dans un jeu de 32 cartes à jouer.
On considère les événements suivants :
A : « On tire un valet »
B : « On tire un roi »
Les deux évènements A et B sont incompatibles, en effet A $\cap$ B = $\varnothing$.
On en déduit que la probabilité de l'évènement « Tirer un valet ou un roi » est égale à :

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$