3ème	Systèmes de deux équations à deux inconnues	2011/2012

Objectifs :

- Savoir résoudre un système à deux équations à deux inconnues.

Exemple d'introduction :

Dans un parc d'attraction, trois familles s'arrêtent devant un stand de boisson. Les trois pères de familles vont chacun à leurs tours acheter des boissons. Le premier père achète une canette de Coca-Cola et 3 bouteilles de Fanta.
Il paye 5€60.

Peut-on savoir le prix d'une canette de Coca-Cola et une bouteille de Fanta ?

____

Le deuxième père achète lui 3 Coca-Cola et 2 bouteilles de Fanta ? Il paye 6€30.

Le troisième père, mathématicien, aimerait acheter une canette de Coca-Cola et un bouteille de Fanta.
Il aimerait savoir à l'avance combien il va payer.

Combien y a-t-il d'inconnues à ce problème ?

____

On va noter x le prix d'une canette de Coca-Cola et y le prix d'une bouteille de Fanta.
Écris une équation qui traduit l'achat du premier père : ____

Écris une équation qui traduit l'achat du premier père : ____

Un couple (x ; y) qui vérifie simultanément (c'est à dire en même temps) deux équations est appelé **solution du système de deux équations à deux inconnues** suivant :

$$\begin{cases} x + 3y = 5,6 & (1) \\ 3x + 2y = 6,3 & (2) \end{cases}$$

Est-il possible qu'une canette de Coca-Cola coûte 1,20€ et une bouteille de Fanta 1€60 ?

____

____

Nous allons résoudre le problème à l'aide de la méthode dites de ***substitution***.
A l'aide de l'équation (1), exprime x en fonction de y : x = _____________
Remplace x par la valeur trouvée dans la question précédente dans l'équation

$$3x + 2y = 6,3 \quad (2)$$

puis calcule y :

Combien vaut donc une bouteille de Fanta ? ____
Combien vaut donc une canette de Coca-Cola ?____

I. Équations du premier degré à deux inconnues

Définition :

On appelle **équation du premier degré à deux inconnues** x et y toute équation qui peut s'écrire :

$ax + by = c$ où a, b et c sont des nombres donnés.

Résoudre une telle équation c'est trouver tous les couples (x ; y) qui rendent l'égalité vraie.

Exemple : $3x - 2y = 9$ est une **équation du premier degré à deux inconnues** x et y.

· Pour $x = 3$ et $y = 0$, l'égalité $3x - 2y = 9$ est vraie donc le couple (3 ; 0) est solution de cette équation.

· Pour $x = -1$ et $y = -6$, l'égalité $3x - 2y = 9$ est vraie donc le couple (- 1 ; - 6) est également solution de cette équation.

· Pour $x = 4$ et $y = -1$, l'égalité $3x - 2y = 9$ n'est pas vraie donc le couple (4 ; - 1) n'est pas solution de cette équation.

Remarque :

Une équation du premier degré à deux inconnues admet une **infinité de couples solutions**.

EXERCICES : (Définition)

II. Système du premier degré de deux équations à deux inconnues

Définition :

Soient a, b, c, a', b' et c' des nombres donnés.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

est un **système de deux équations du premier degré à deux inconnues** x et y.

Résoudre un tel système c'est trouver tous les couples (x ; y) qui rendent **simultanément** les deux égalités vraies.

Exemple :

$\begin{cases} -2x + y = -7 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases}$ est un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y.

· Pour $x = 2$ et $y = -3$, les égalités $-2x + y = -7$ et $5x + 3y = 1$ sont vraies donc le couple (2 ; - 3) est solution de ce système d'équations.

· Pour $x = 4$ et $y = 1$, l'égalité $-2x + y = -7$ est vraie mais l'égalité $5x + 3y = 1$ est fausse donc le couple (4 ; 1) n'est pas solution de ce système d'équations.

Remarque : Dans certains cas, il n'y a pas de solution.

EXERCICES :

III. Méthodes de résolutions

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 4x + 5y = -1 \end{cases}$$

1. Par substitution

On va exprimer une inconnue en fonction de l'autre : $x = 3 + 2y$

On remplace la valeur trouvée dans la deuxième ligne :

$$4\,(3 + 2y) + 5y = -1$$
$$12 + 8y + 5y = -1$$
$$13y = -13$$
$$y = -1$$

On remplace la valeur de la deuxième ligne dans la première : $x = 3 + 2 \times (-1) = 1$

Le couple (1 ; - 1) est donc solution du système.

Remarque :
Cette méthode est bien pratique lorsque l'un des coefficient de x ou y vaut 1, sinon des fractions apparaissent et compliquent le calcul.

EXERCICES : (Résolution par substitution)

2. Par combinaisons

Cette méthode va utiliser le fait que l'on peut multiplier une équation par un même nombre non nul ou que l'on peut ajouter des équations entre elles sans que cela change le résultat.

Voici la démarche à suivre :

On va multiplier la première ligne par - 4 :

$$\begin{cases} \mathbf{-4}\,(x - 2y) = \mathbf{-4} \times 3 \\ 4x + 5y = -1 \end{cases}$$

On développe la première ligne :

$$+\begin{cases} -4x + 8y = -12 \\ 4x + 5y = -1 \end{cases}$$

On va ajouter les deux équations ensembles :

$$\mathbf{-4x + 8y} + 4x + 5y = \mathbf{-12} - 1$$
$$13y = -13 \text{ donc } y = -1$$

On remplace la valeur trouvée dans la première ligne :

$$-4x + 8 \times (-1) = -12$$
$$-4x = -4$$
$$x = 1$$

Le couple (1 ; - 1) est donc solution du système.

Remarque :
Pour faire disparaître une inconnue, il est souvent utile de multiplier les deux équations par un même nombre pour qu'en additionnant ensuite, une inconnue se simplifie.

EXERCICES : (Résolution par combinaisons)

3. Par graphique

Nous allons résoudre ce système graphiquement, à l'aide des fonctions affines comme suivant :

1ère étape :

On écrit les deux équations entre accolades : $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 4x + 5y = -1 \end{cases}$

2ème étape :

On va exprimer y en fonction de x sur chaque équation $\begin{cases} -2y = 3 - x \\ 5y = -1 - 4x \end{cases}$ $\begin{cases} y = -1{,}5 + 0{,}5x \\ y = -0{,}2 - 0{,}8x \end{cases}$

3ème étape :

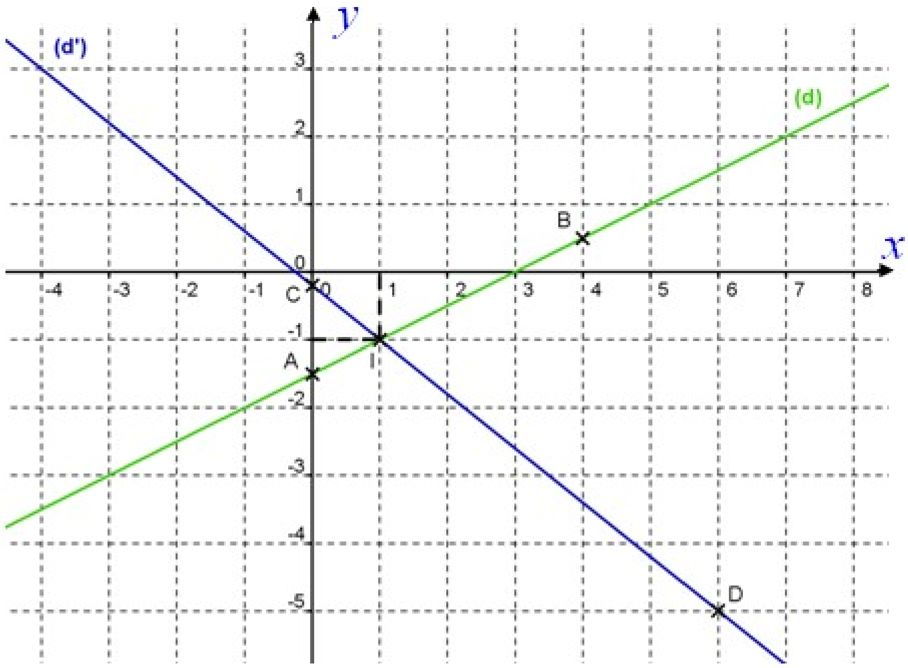
Nous obtenons 2 fonctions affines que l'on va représenter dans un repère. $\begin{cases} y = -1{,}5 + 0{,}5x \\ y = -0{,}2 - 0{,}8x \end{cases}$

On note (d) la droite représentative de la fonction affine f (x) = - 1,5 + 0,5x

On a f (3) = 0 et f (7) = 2

On note (d') la droite représentative de la fonction affine g (x) = -1,5 + 0,5x

On a g (- 4) = 3 et g (6) = - 5



Les solutions sont donc à l'intersection de ces deux droites. Dans notre cas, les deux droites se coupent en un point (1 ; - 1), donc la solution du système est (1 ; - 1).

EXERCICES : (Résolutions graphiques)

EXERCICES : (Problèmes)