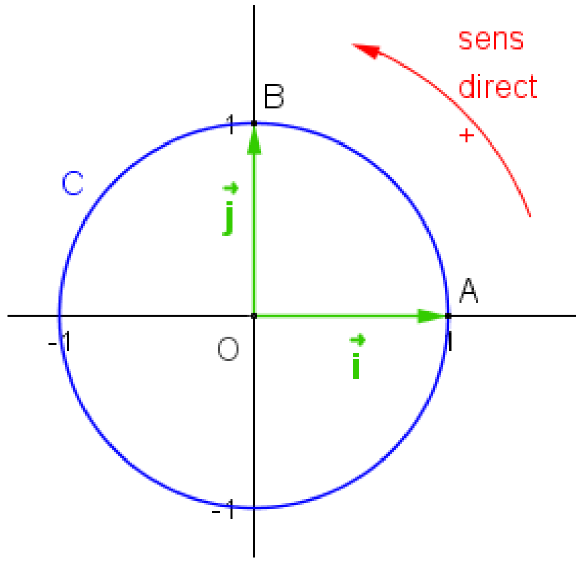
Trigonométrie

TRIGONOMETRIE

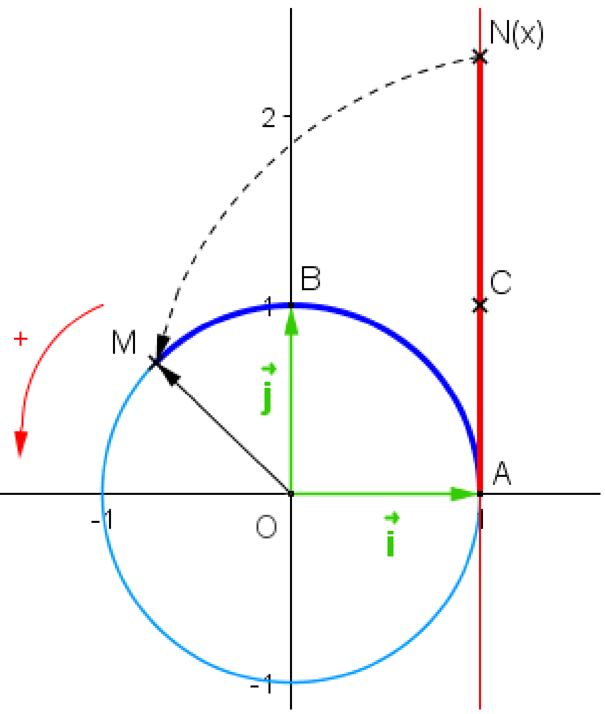
I. Le cercle trigonométrique

Définition : Sur un cercle, on appelle sens direct, sens positif ou sens trigonométrique le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Définition :
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ et orienté dans le sens direct, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1.



II. Enroulement de la droite numérique



1) Définition de l'enroulement

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$, on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que $\left(A\,;\vec{j}\right)$ soit un repère de la droite.

Si l'on « enroule » la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle.
La longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ est ainsi égale à la longueur AN.

2) Correspondance entre abscisse et angle

La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π.
En effet, son rayon est 1 donc $P = 2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$

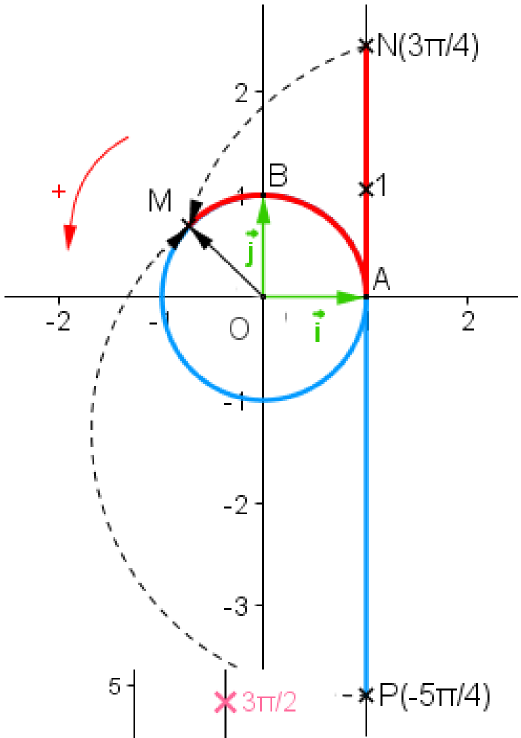
Après enroulement, le point N d'abscisse 2π sur la droite orientée se trouve donc en A sur le cercle. Cela correspond à un tour complet.

Ainsi au nombre réel 2π (abscisse de N sur la droite orientée) on fait correspondre un angle de 360° (mesure de $\widehat{AOM}$).

Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Abscisse du point N sur la droite orientée	-2π	$-\pi$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{4}$	0	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π	2π
Angle $\widehat{AOM}$ en degré	-360°	-180°	-90°	-45°	0°	45°	90°	180°	360°

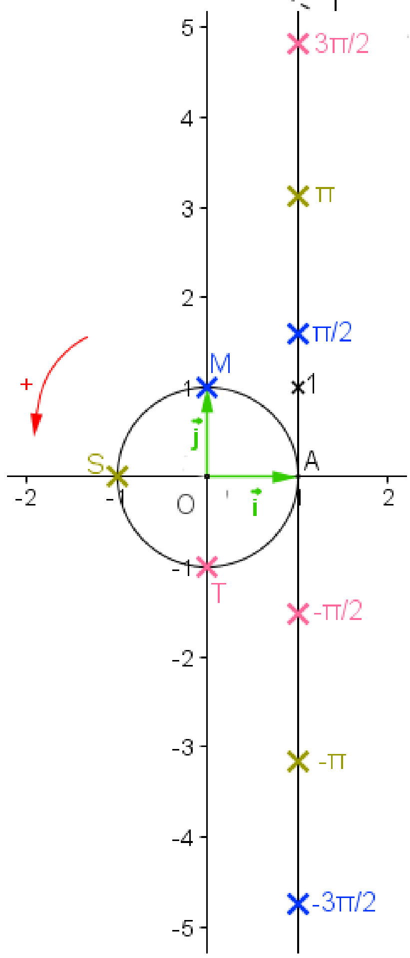
3) <u>Plusieurs abscisses pour un seul point</u>



A plusieurs points de la droite orientée on peut faire correspondre un même point du cercle.
La droite orientée peut en effet s'enrouler plusieurs fois autour du cercle.

<u>Exemples :</u>

Ci-contre, les points N et P d'abscisses $\dfrac{3\pi}{4}$ et $\dfrac{-5\pi}{4}$ correspondent tous les deux au point M.



Les points de la droite orientée d'abscisses $\dfrac{\pi}{2}$ et $-\dfrac{3\pi}{2}$ correspondent tous les deux au point M du cercle trigonométrique.

Les points de la droite orientée d'abscisses π et $-\pi$ correspondent tous les deux au point S du cercle trigonométrique.

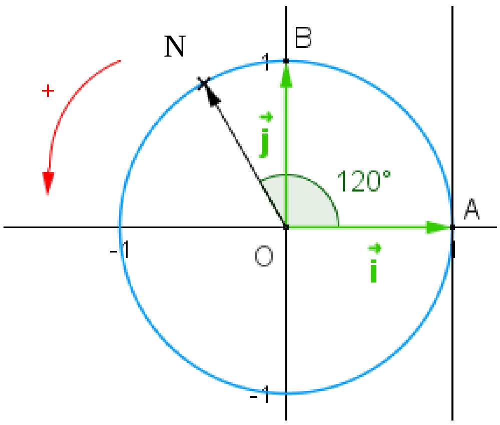
Les points de la droite orientée d'abscisses $\dfrac{3\pi}{2}$ et $-\dfrac{\pi}{2}$ correspondent tous les deux au point T du cercle trigonométrique.

Méthode :
Déterminer un point défini par enroulement autour du cercle trigonométrique

1) On enroule la droite orientée des réels sur le cercle trigonométrique de centre O.
Déterminer le point M du cercle associé au réel $\frac{9\pi}{4}$ dans cet enroulement.
2) Placer sur le cercle trigonométrique le point N correspondants à l'angle 480°.

1) $\frac{9\pi}{4}=\frac{8\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=2\pi+\frac{\pi}{4}$
L'enroulement effectué correspond à un tour complet du disque (2π) suivi d'un huitième de tour $(\frac{\pi}{4})$.Le point M se trouve donc sur le cercle trigonométrique tel que $\widehat{AOM}$ = 45°.

2) 480° = 360° + 120°
Le point N se trouve donc sur le cercle trigonométrique tel que $\widehat{AON}$ = 120°.

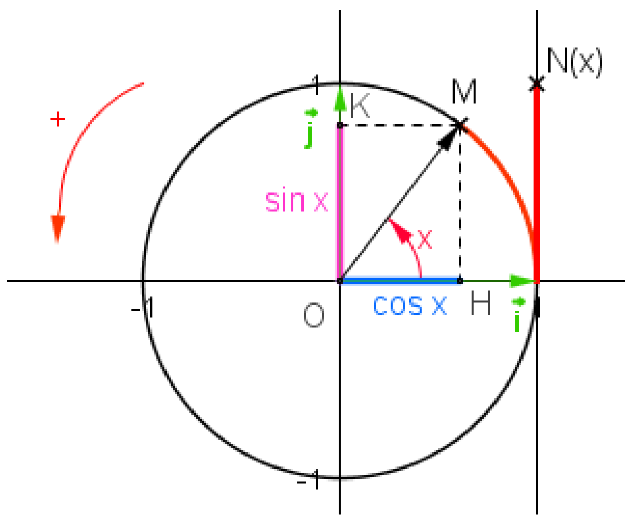


III. Sinus et cosinus d'un nombre réel

1) Définitions :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et orienté dans le sens direct, on considère un cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1. Pour tout nombre réel x, considérons le point N de la droite orientée d'abscisse x.
À ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique.

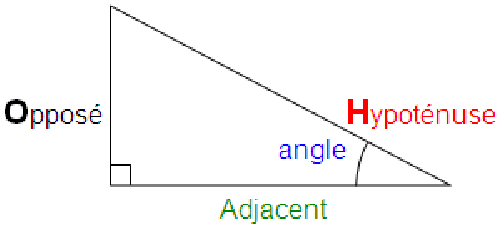
On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées passant par M.



Définitions :
Le cosinus du nombre réel x est l'abscisse de M et on note **cos *x***.
Le sinus du nombre réel x est l'ordonnée de M et on note **sin *x***.

2) Lien avec la trigonométrie vue dans le triangle rectangle :

Rappel :
Dans un triangle rectangle :



Cos (angle) = $\dfrac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$

Sin (angle) = $\dfrac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}}$

Tan (angle) = $\dfrac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}}$

Ainsi dans le triangle OHM rectangle en H, on a :

$\cos x = \dfrac{OH}{OM}$

Or OM =1, donc :

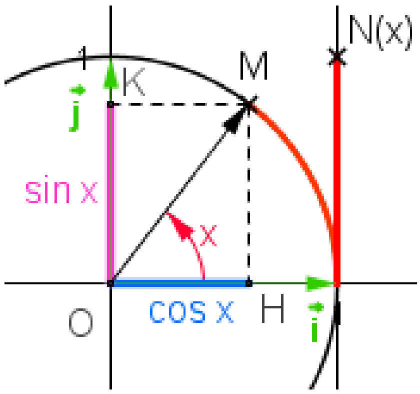
$OH = \cos x$

cos x est donc l'abscisse de M.

On a également :

$\sin x = \dfrac{MH}{OM} = \dfrac{OK}{OM} = OK$

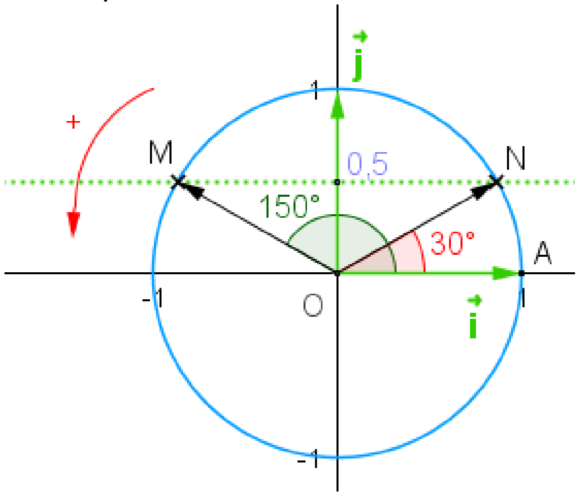
sin x est donc l'ordonnée de M.



Méthode : Résoudre une équation trigonométrique.

Pour x compris entre 0° et 180°, résoudre l'équation suivante :
$\sin x = 0{,}5$.

On trace la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point d'ordonnée 0,5.
Sur le cercle trigonométrique, on peut lire pour $0° \leq x \leq 180°$ les points correspondants à $\sin x = 0{,}5$.
Il s'agit des points M et N tel que :
$\widehat{AOM} = 150°$ et $\widehat{AON} = 30°$



Ainsi $x = 30°$ ou $x = 150°$

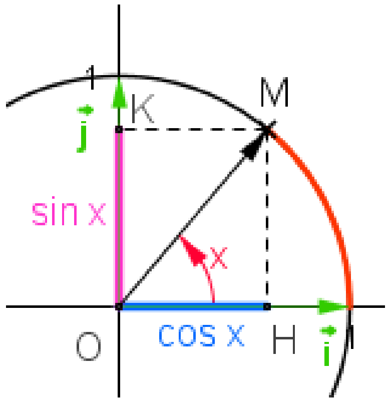
3) Propriétés :

Propriétés :
Pour tout nombre réel x, on a :
1) $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$
2) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
3) $\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$

Remarque : $(\sin x)^2$, par exemple, se note $\sin^2 x$.

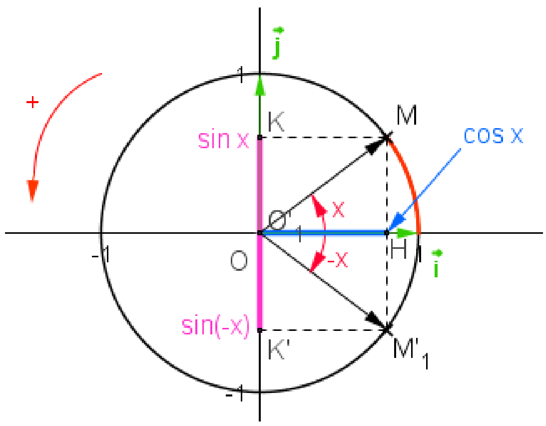
Démonstrations :

1) Le cercle trigonométrique est de rayon 1 donc :
$-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$.



2) Dans le triangle OHM rectangle en H, le théorème de Pythagore permet d'établir que :
$\cos^2 x + \sin^2 x = OM^2 = 1$.

3) Les angles de mesures x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc :
$\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$.



4) <u>Valeurs particulières :</u>

Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus à connaître :

x	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

5) <u>Exemple d'application :</u>

Soit x un nombre réel. Calculer cos x sachant que sin x = $\frac{3}{5}$.

On sait que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, soit :

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1-\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

Soit encore :

$\cos x = \frac{4}{5}$ ou $\cos x = -\frac{4}{5}$.