§2 - VECTEURS - COLINEARITE

(Livre p 165)

A - COLINEARITE DE DEUX VECTEURS

1 Définitions

Définition 1

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si l'on dispose de l'une des deux égalités suivantes :
il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou il existe un réel k' tel que $\vec{u} = k'\vec{v}$.

Remarques : • Si l'un des vecteurs est nul, par exemple $\vec{v}$, on a évidemment $\vec{v} = k\vec{u}$ avec $k = 0$. Tout couple contenant $\vec{0}$ est un couple de vecteurs colinéaires et en particulier le couple $(\vec{0}\ ;\ \vec{0})$ est un couple de vecteurs colinéaires.

• Si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non-nuls, alors $\vec{v} = k\vec{u}$ implique k non nul (sinon $\vec{v} = \vec{0}$) donc on dispose aussi de $\vec{u} = \frac{1}{k}\vec{v}$. Les deux égalités de la définition sont ainsi satisfaites.

• Si le vecteur $\vec{u}$ est non nul, nécessairement on dispose de la relation $\vec{v} = k\vec{u}$; en effet si l'on a $\vec{u} = k'\vec{v}$ nécessairement k' est non nul et $\vec{v} = \frac{1}{k'}\vec{u}$.

Définition 2

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs avec $\vec{u}$ **non nul**, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.
On dit alors que : « le vecteur $\vec{v}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$ ».

Exemple : Les vecteurs $\vec{u}(1\ ;\ 3)$ et $\vec{v}(2\ ;\ 6)$ sont colinéaires puisque $\vec{v} = 2\vec{u}$.
On aurait pu justifier la colinéarité en annonçant la seconde égalité : $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}$.

2 Condition de colinéarité

Propriété 1

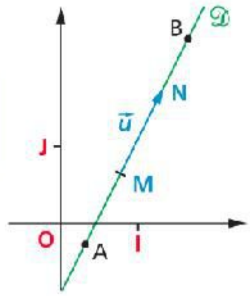
Deux vecteurs $\vec{u}(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}(x'\ ;\ y')$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

Démonstration : • Supposons les vecteurs $\vec{u}(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}(x'\ ;\ y')$ colinéaires.
– Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $x = y = 0$ et la relation $xy' - x'y = 0$ est vraie.
– Si $\vec{u}$ non nul, d'après **la définition 2**, il existe alors un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.
Ce qui s'écrit en coordonnées $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$. On a alors $xy' - x'y = xky - kxy$, soit $xy' - x'y = 0$.
La relation est encore vraie.
• Réciproquement, supposons $xy' - x'y = 0$.
– Si l'un des vecteurs est non nul, par exemple $\vec{u}$, alors on peut supposer que $x \neq 0$.
On pose alors $k = \frac{x'}{x}$, c'est-à-dire $x' = kx$. L'égalité $xy' - x'y = 0$ s'écrit $xy' - kxy = 0$
et comme $x \neq 0$, $y' - ky = 0$. On a donc $x' = kx$ et $y' = ky$.
D'où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
– Si les deux vecteurs sont nuls, ils sont *a fortiori* colinéaires.

Exemples : Les vecteurs $\vec{u}(1\ ;\ 3)$ et $\vec{v}(2\ ;\ 6)$ vérifient $1 \times 6 - 2 \times 3 = 0$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires. Les vecteurs $\vec{u}(0\ ;\ 0)$ et $\vec{v}(\sqrt{2}\ ;\ 2\pi)$ vérifient $0 \times \sqrt{2} - 0 \times 2\pi = 0$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires. Dans le premier exemple on a à la fois $\vec{v}$ colinéaire à $\vec{u}$ et $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{v}$; dans le second $\vec{u}$ est nul donc colinéaire à $\vec{v}$.

B - EQUATIONS D'UNE DROITE

1 Équations cartésiennes d'une droite



Définition 3

On appelle **vecteur directeur** d'une droite $\mathscr{D}$, tout vecteur $\vec{u}$ non nul, défini par deux points distincts, M et N de $\mathscr{D}$.

Propriété 2

Tout vecteur $k\overrightarrow{MN}$, avec k réel non nul, est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

Propriété 3

Une droite $\mathscr{D}$ du plan peut être définie par deux points distincts A et B de $\mathscr{D}$, ou un point A de $\mathscr{D}$ et un **vecteur directeur** $\vec{u}$ de $\mathscr{D}$.

REMARQUES : • La droite (AB) est une droite qui passe par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.
• La droite définie par le point A et le vecteur directeur $\vec{u}$ est la droite (AB) avec le point B défini par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ (A et B distincts).

Propriété 4

• Toute droite $\mathscr{D}$ du plan dans un repère (O, I, J) admet une **équation cartésienne** de la forme $ax + by + c = 0$ avec a et b réels non simultanément nuls.
• Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées **$(-b\ ;\ a)$** est un **vecteur directeur** de cette droite.

Démonstration

Soit M un point quelconque de coordonnées $(x\ ;\ y)$ appartenant à la droite (AB).
Les points A, B et M sont alignés, donc les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ de coordonnées $(x - x_A\ ;\ y - y_A)$ et $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A)$ sont colinéaires.
D'après la condition de colinéarité (propriété 1 p. xxx), on a :
$(x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0$.
Ce qui peut s'écrire :
$x(y_B - y_A) - y(x_B - x_A) - x_A(y_B - y_A) + y_A(x_B - x_A) = 0$.
On pose $a = (y_B - y_A)$, $b = -(x_B - x_A)$
et $c = -x_A(y_B - y_A) + y_A(x_B - x_A)$.
Cette équation est donc de la forme $ax + by + c = 0$.

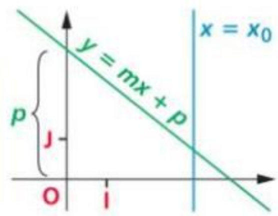
Commentaire

$\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $(-b\ ;\ a)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Propriété 5

Deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équations cartésiennes respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont **parallèles** si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

2 Équation réduite d'une droite



Propriété 6

Toute droite $\mathscr{D}$ du plan a pour équation $y = mx + p$ ou $x = x_0$, appelées **équations réduites**.
m s'appelle le **coefficient directeur** et p **l'ordonnée à l'origine**.

DÉMONSTRATION : On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

• Si $b \neq 0$, l'équation devient $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ qui est de la forme $y = mx + p$.

• Si $b = 0$, comme a et b ne sont pas simultanément nuls, $a \neq 0$. L'équation s'écrit $x = -\dfrac{c}{a}$ de la forme $x = x_0$.

REMARQUES : • L'équation réduite d'une droite est unique.
• La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = mx + p$ a pour vecteur directeur le vecteur $(1\ ;\ m)$.
• Si $b \neq 0$, la droite $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ a pour coefficient directeur $-\dfrac{a}{b}$.

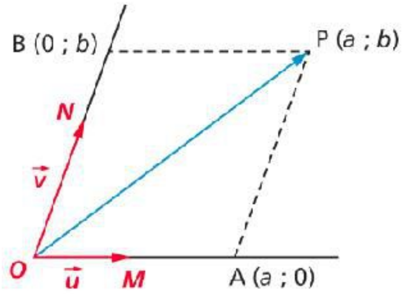
C - DECOMPOSITION D'UN VECTEUR

1 Généralités

Propriété 7

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non-colinéaires. Tout vecteur du plan $\vec{w}$ s'écrit de façon **unique** sous la forme $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ avec a et b réels.

DÉMONSTRATION :



Existence

On choisit un point O du plan et les points M et N définis par $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$. Comme les vecteurs ne sont pas colinéaires, les points O, M et N constituent un repère du plan.

Prenons alors P défini par $\vec{w} = \overrightarrow{OP}$. Le point P est repéré par ses coordonnées $(a\ ;\ b)$.

Soit A et B les points de coordonnées respectives $(a\ ;\ 0)$ et $(0\ ;\ b)$. On a $\overrightarrow{OA} = a\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OB} = b\overrightarrow{ON}$ (voir l'activité 2) et d'après la formule donnant les coordonnées de la somme de deux vecteurs : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Ce qui s'écrit $\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OM} + b\overrightarrow{ON}$.

Or $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OP}$. L'égalité précédente devient $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Unicité

Supposons qu'il existe deux écritures du vecteur $\vec{w}$ de ce type.

On a ainsi $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ et $\vec{w} = a'\vec{u} + b'\vec{v}$.

Ce qui donne $a\vec{u} + b\vec{v} = a'\vec{u} + b'\vec{v}$ ① qui s'écrit encore $(a - a')\vec{u} + (b - b')\vec{v} = \vec{0}$.

Supposons $a - a' \neq 0$, le vecteur $\vec{u}$ peut s'écrire $\vec{u} = -\dfrac{b - b'}{a - a'}\vec{v}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seraient alors colinéaires ce qui est contraire à l'hypothèse, donc $a = a'$.

L'égalité ① devient $b\vec{v} = b'\vec{v}$. Comme les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, le vecteur $\vec{v}$ est non nul, et donc $b = b'$. L'écriture $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ est donc unique.

Logique

Après avoir démontré l'existence d'une solution, on montre l'unicité de la solution en supposant qu'il en existe deux. Ensuite on prouve qu'elles sont identiques.

2 Application aux repères du plan

Définition 4

- Le point O et les deux vecteurs non-colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ constituent un repère du plan. On le note : repère $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.
- L'égalité $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ se traduit par : le point M a pour coordonnées $(a\ ;\ b)$ dans le repère constitué du point O et des vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

REMARQUE : Le triangle OMN détermine un repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ et le repère $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$ détermine le triangle OMN avec $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$.

EXEMPLE : Soit ABCD un parallélogramme. C a pour coordonnées $(1\ ;\ 1)$ dans le repère constitué du point A et des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, traduction de $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Le milieu du segment [BD] a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ qui se traduit vectoriellement par $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$.