Cours sur les limites et la continuité

1. Limite d'une fonction en l'infini

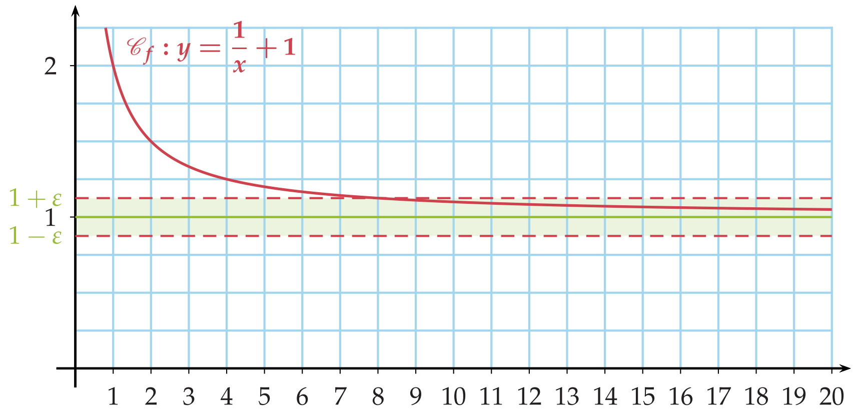
Dans toute cette partie, $\mathscr{C}_f$ désigne la courbe représentative de la fonction f dans un repère quelconque du plan.

A. Limite finie en l'infini

DÉFINITION

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]a\,;\,+\infty[$.
La fonction f a pour limite ℓ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On note alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Exemple Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x} + 1\right) = 1$.
En effet, l'inverse de x se rapproche de 0 à mesure que x augmente.
Soit un intervalle ouvert I tel que $1 \in I$. Alors, $f(x)$ sera toujours dans I pour x assez grand.
Graphiquement, aussi étroite que soit une bande parallèle à la droite d'équation $y = 1$ et qui la contient, il existe toujours une valeur de x au delà de laquelle $\mathscr{C}_f$ ne sort plus de cette bande.



DÉFINITION : Asymptote horizontale

La droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à $\mathscr{C}_f$ **en** $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

REMARQUE : On définit de façon analogue $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ qui caractérise une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ d'équation $y = \ell$.

Exemple On a vu précédemment que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x} + 1\right) = 1$. On a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{x} + 1\right) = 1$.
Donc, la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

PROPRIÉTÉ (admise) : Limites finies des fonctions usuelles en $\pm\infty$

Soit n un entier naturel non nul.

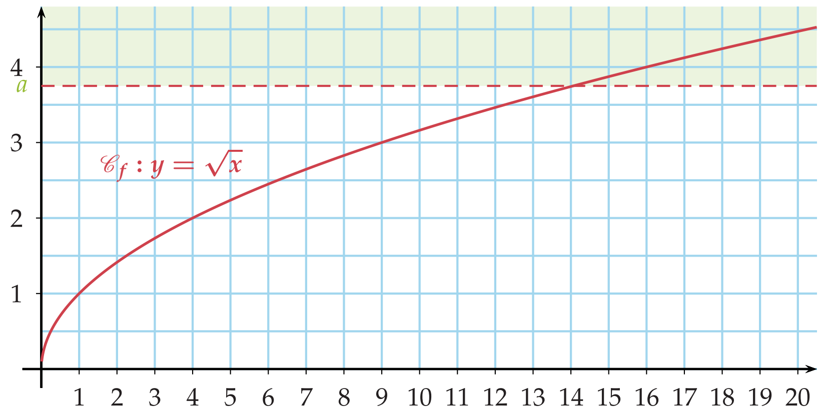
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

B. Limite infinie en l'infini

DÉFINITION

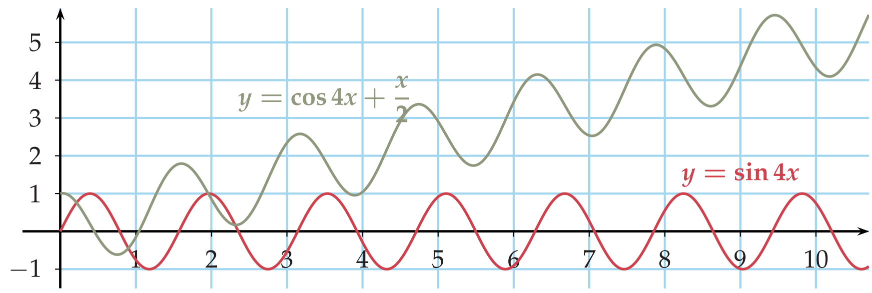
La fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]a\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On note alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exemple Soit f la fonction racine carrée. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
En effet, $\sqrt{x}$ devient aussi grand que l'on veut à mesure que x augmente.
Soit un intervalle ouvert $I =]a\,;\,+\infty[$. Alors, $f(x)$ sera toujours dans I pour x assez grand.
Graphiquement, si on considère le demi-plan supérieur de frontière une droite d'équation $y = a$, il existe toujours une valeur de a au-delà de laquelle $\mathscr{C}_f$ ne sort plus de ce demi-plan.



REMARQUE :

- On définit de façon analogue : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
- Il existe des fonctions qui n'admettent pas de limite en l'infini. Par exemple, les fonctions sinus et cosinus n'admettent de limite ni en $+\infty$, ni en $-\infty$.
- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas forcément croissante.



PROPRIÉTÉ (admise) : Limites infinies des fonctions usuelles en $\pm\infty$

Soit n un entier naturel non nul.

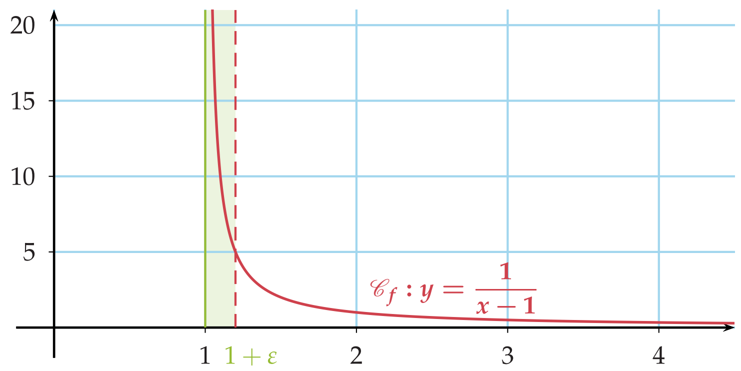
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{pour } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$

2. Limite infinie en un réel

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ du type $]x_0-\varepsilon\,;\,x_0[$ ou $]x_0\,;\,x_0+\varepsilon[$. La fonction f a pour limite $+\infty$ en x_0 si tout intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]A\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de x_0. On note alors : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.

Exemple Soit f la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$. On a $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$.
En effet, si x tend 1, alors $x-1$ tend vers 0 et son inverse tend vers $+\infty$.
Soit un intervalle ouvert $I=]1\,;\,1+\varepsilon[$. Alors, $f(x)$ sera toujours dans I pour x assez proche de x_0. Graphiquement, $\mathscr{C}_f$ peut être aussi proche que l'on veut de la droite d'équation $x=1$.



DÉFINITION : Asymptote verticale

La droite d'équation $x=x_0$ est **asymptote verticale** à $\mathscr{C}_f$ si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$.

Exemple On a vu précédemment que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$.
Donc, la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à l'hyperbole $\mathscr{C}_f$.

Remarque :

- Lorsque x tend vers x_0, cela peut parfois se faire en augmentant ou en diminuant. On parle alors de limite de f à gauche (resp. droite) en x_0 qu'on note $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} f(x)$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} f(x)$).
- Une fonction admet une limite en x_0 si, et seulement si, f admet des limites à droite et à gauche en x_0 qui sont égales (ce qui n'est pas toujours le cas).
- Une fonction peut très bien ne pas avoir de limite du tout en un point.
  Par exemple, la fonction $x\mapsto \sin\dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

PROPRIÉTÉ (admise) : Limites finies des fonctions usuelles en 0

Soit n un entier naturel non nul.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{1}{x^n}=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{1}{x^n}=\begin{cases}+\infty & \text{pour } n \text{ pair}\\ -\infty & \text{pour } n \text{ impair}\end{cases}$

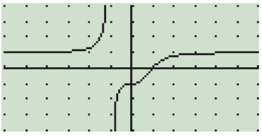
MÉTHODE 1 Interpréter graphiquement les limites d'une fonction

► Ex. 11 p. 65

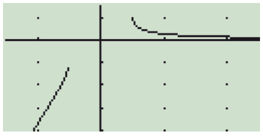
L'aperçu de la courbe représentative d'une fonction avec une calculatrice ou un logiciel peut aider à conjecturer une limite (et donc éventuellement une asymptote à la courbe) mais il faut paramétrer correctement la fenêtre d'affichage pour limiter les erreurs de jugement.

Exercice d'application Soit f une fonction dont on a un aperçu du graphe $\mathscr{C}$. Déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}$, puis conjecturer les limites aux bornes de $\mathcal{D}$ et les asymptotes à $\mathscr{C}$.

1) $f : x \mapsto \dfrac{x^3-1}{x^3+1}$



2) $f : x \mapsto 2x - \sqrt{4x^2-1}$



Correction

1) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. A priori, on aurait : $\lim\limits_{x\to\pm+\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty$.
$\mathscr{C}$ aurait alors une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $\pm\infty$ et une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

2) $\mathcal{D} =]-\infty\,;\, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}\,;\,+\infty[$. On a : $\lim\limits_{x\to-1/2} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to1/2} f(x) = 1$ et, il semblerait que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
$\mathscr{C}$ aurait alors une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) en $+\infty$.
La vérification des conjectures est l'objet de l'exercice 28 page 66.

3. Opérations sur les limites

PROPRIÉTÉ : Limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient de deux fonctions

- Limite d'une somme :

f	g	$f+g$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
ℓ	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	???

- Limite d'un produit :

f	g	fg
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$
$\ell\neq0$	∞	∞
∞	∞	∞
0	∞	???

- Limite d'un quotient :

f	g	f/g
ℓ	$\ell'\neq0$	ℓ/ℓ'
$\ell\neq0$	0	∞
ℓ	∞	0
0	0	???
∞	∞	???

REMARQUE :

- ∞ peut signifier $+\infty$ ou $-\infty$. Les règles du signe d'un produit ou d'un quotient demeurent.
- Pour la limite de la différence $f-g$, on considère la limite de la somme $f+(-g)$.
- Les quatre lignes grises des tableaux correspondent aux quatre cas d'indétermination :
  - « $(+\infty)+(-\infty)$ »
  - « $0\times\infty$ »
  - « $\dfrac{0}{0}$ »
  - « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

  Plusieurs techniques seront vues pour lever une indétermination. ► Ex. 2 p. 60

Exemple Soit $f : x \mapsto (1-x)\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

4. Limite d'une fonction composée

A. Fonction composée

Une composée de deux fonctions correspond à un enchaînement de deux fonctions l'une après l'autre.
Par exemple, composons la fonction $f : x \mapsto 1 - x$ suivie de $g : x \mapsto \sqrt{x}$. On peut ainsi schématiser :

$$x \underset{f}{\mapsto} 1 - x \underset{g}{\mapsto} \sqrt{1-x}.$$

Cependant, on voit que la fonction g ne peut s'appliquer que si l'ensemble des images par la fonction f est inclus dans l'ensemble de définition de g.
Ainsi, pour appliquer ici la racine carrée, il faut que $1 - x \geqslant 0$ c'est-à-dire que $x \leqslant 1$.
La composée existe donc dans le schéma suivant où on précise les ensembles de départ et d'arrivée pour f :

$$\begin{array}{ccccc}]-\infty\,;\,2] & \rightarrow & [0\,;\,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \underset{f}{\mapsto} & 1-x & \underset{g}{\mapsto} & \sqrt{1-x} \end{array}$$

En composant f suivie de g, on a ainsi défini sur $]-\infty\,;\,1]$ la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$.

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur E et à valeurs dans F, et soit g une fonction définie sur F.
La composée de f suivie de g est la fonction notée $\boldsymbol{g \circ f}$ définie sur E par $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Remarque : Il ne faut pas confondre $g \circ f$ et $f \circ g$ qui sont, en général, différentes.

Exemple En reprenant f et g de l'exemple précédent, définissons $f \circ g$.
La composée de g suivie de f est possible en partant de l'ensemble de définition de g :

$$\begin{array}{ccccc} [0\,;\,+\infty[& \rightarrow & [0\,;\,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \underset{g}{\mapsto} & \sqrt{x} & \underset{f}{\mapsto} & 1-\sqrt{x} \end{array}$$

En composant g suivie de f, on a ainsi défini sur $[0\,;\,+\infty[$ la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{x}$.

B. Théorème de composition des limites

THÉORÈME

Soit h la composée de la fonction f suivie de g et α, β et γ trois réels ou $\pm\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ et $\lim\limits_{x\to\beta} g(x) = \gamma$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = \gamma$.

Exemple Déterminons la limite en $-\infty$ de la fonction $g \circ f$ de l'exemple précédent.
La composée de $f : x \mapsto 1 - x$ suivie de $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est $h : x \mapsto \sqrt{1-x}$ définie sur $]-\infty\,;\,1]$.
Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} (1-x) = +\infty$ (par somme) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ (limite de référence).
Donc, d'après le théorème de composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$.

MÉTHODE 2 Déterminer une limite de fonction

► Ex. 16 p. 65

On applique les propriétés d'opérations sur les limites.

Si la limite est indéterminée, « $+\infty+(-\infty)$ », « $0\times\infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » ou « $\frac{0}{0}$ », on essaye de :

- factoriser par le terme prépondérant ;
- multiplier par la quantité conjuguée[a] si des racines carrées interviennent ;
- effectuer un changement de variable (voir théorème de composition des limites).

D'autres techniques existent et seront vues ultérieurement.

a. on désigne généralement par $a-b\sqrt{c}$ la quantité conjuguée de $a+b\sqrt{c}$

Exercice d'application Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

Correction Ces limites sont indéterminées (respectivement formes « $\infty-\infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ »).

1) On multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée de $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

Or, par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty$.

Et, par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=+\infty$. Donc, par inverse : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$.

2) Divisons le numérateur et le dénominateur par x^2. Alors, $\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}=\dfrac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}$.

Or, par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=1$.

Donc, par quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=2$.

3) Changeons de variable en posant $u=\sqrt{x}$. Si x tend vers 4, alors u tend vers 2.

$\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{u^2-4}{u-2}=\dfrac{(u+2)(u-2)}{u-2}=u+2$ pour $u\neq2$. Donc, par somme : $\lim\limits_{u\to2}(u+2)=4$.

5. Limites et comparaison

A. Théorème de comparaison

THÉORÈME

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x)\leqslant g(x)$ sur un intervalle $]\alpha\,;+\infty[$ de $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x)\leqslant g(x)$ sur un intervalle $]-\infty\,;\beta[$ de $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x)\leqslant g(x)$ sur un intervalle $]\alpha\,;\beta[$ de $\mathbb{R}$ et $x_0\in]\alpha\,;\beta[$.

- $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$.

Exemple Déterminons la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de $f(x) = x + \sin x$.
La limite de $\sin x$ en $\pm\infty$ est indéterminée donc, celle de $f(x)$ aussi.
Mais pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ donc $x - 1 \leqslant x + \sin x \leqslant x + 1$. Ainsi :

- De $x - 1 \leqslant x + \sin x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} (x + \sin x) = +\infty$.
- De $x + \sin x \leqslant x + 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty$, on déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} (x + \sin x) = -\infty$.

B. Théorème d'encadrement dit « des gendarmes » ou « sandwich »

THÉORÈME

Soit deux réels α et ℓ et trois fonctions f, g et h telles que, pour $x > \alpha$, on a $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$.

Remarque : On a, comme pour le théorème de comparaison précédent, deux théorèmes analogues lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers un réel x_0.

Exemple Déterminons la limite en $-\infty$ de $f(x) = \dfrac{x \cos x}{x^2 + 1}$.
La limite de $\cos x$ en $-\infty$ est indéterminée. Donc celle de $f(x)$ aussi.
Cependant pour tout x réel strictement négatif, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ donc $x \leqslant x \cos x \leqslant -x$.
Et en divisant membre à membre par $x^2 + 1 > 0$ on a : $\dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{x \cos x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{-x}{x^2+1}$.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{x + \frac{1}{x}}$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x + \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{x^2+1} = 0$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x \cos x}{x^2+1} = 0$.

6. Continuité d'une fonction

Remarque : Les programmes limitent la continuité à une approche intuitive qui est de considérer qu'une fonction est continue sur un intervalle I si sa courbe représentative sur I peut être tracée entièrement sans lever le crayon.

PROPRIÉTÉ (admise)

- Les fonctions usuelles (affines, carré, inverse, racine carrée, valeur absolue) sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- Toute fonction construite algébriquement (par somme, produit, inverse ou composée) à partir de fonctions usuelles est continue sur tout intervalle de son ensemble de définition.
- On convient qu'une flèche oblique dans un tableau de variation traduit la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.
- Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Remarque : Attention, la réciproque de cette dernière propriété est fausse.
Par exemple, la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais non dérivable en 0.

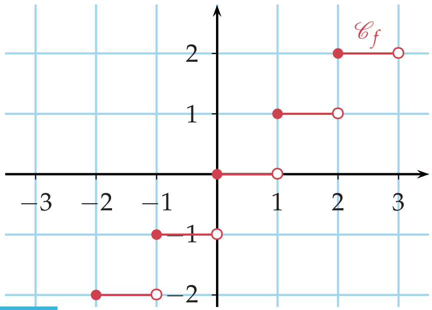
MÉTHODE 3 Interpréter graphiquement la continuité d'une fonction

► Ex. 40 p. 68

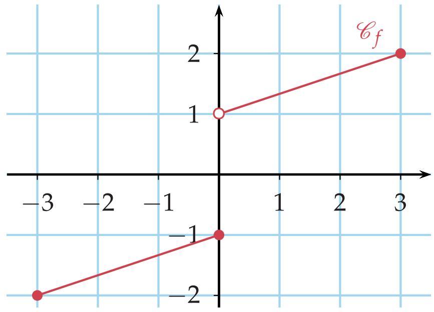
Par convention, une fonction est continue là où elle est tracée. S'il n'y a pas continuité en x_0 :
- le symbole • indique le point de la courbe de coordonnées $(x_0 ; f(x_0))$;
- le symbole ∘ indique un point qui n'appartient pas à la courbe mais dont l'ordonnée est égale à la limite à gauche ou à droite en x_0.

Exercice d'application Déterminer graphiquement les intervalles sur lesquels f est continue.

1) Soit la fonction partie entière $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$.



2) Soit la fonction f représentée ci-dessous.



Correction

1) En tout point d'abscisse $a \in \mathbb{Z}$, $\mathscr{C}_f$ présente un saut : on a $f(a) = a$ mais $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = a - 1$.
Ainsi, f n'est pas continue en a mais f est continue sur tout intervalle $[a ; a+1[$.

2) f est « affine par morceaux ». $\mathscr{C}_f$ a un « saut » en 0 donc f n'est pas continue sur $[-3 ; 3]$ mais elle est continue sur $[-3 ; 0]$ et $]0 ; 3]$. En effet, on a $f(0) = -1$ mais $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$.

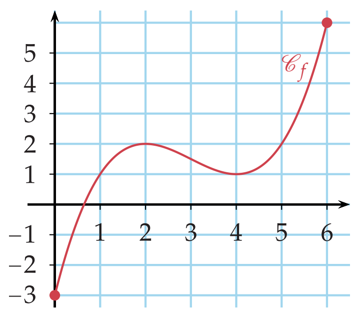
7. Théorème des valeurs intermédiaires

THÉORÈME : Cas général

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant deux réels a et b tels que $a < b$.
Si f est continue sur $[a ; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c appartenant à $[a ; b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarque : f prend au moins une fois toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.
Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution dans $[a ; b]$ et, sur $[a ; b]$, la courbe représentative de f coupe la droite d'équation $y = k$ en un point au moins.

Exemple Soit f la fonction définie sur $[0 ; 6]$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{9}{4}x^2 + 6x - 3$.



On dresse le tableau de variation de f.

x	0		2		4		6
f	-3	↗	2	↘	1	↗	6

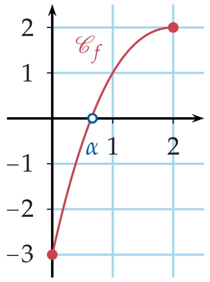
f admet pour minimum -3 et pour maximum 6.
f est continue sur $[0 ; 6]$.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f prend toutes les valeurs de $[-3 ; 6]$. En particulier, l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $[0 ; 6]$.

THÉORÈME : Cas d'une fonction strictement monotone

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant deux réels a et b tels que $a < b$.
Si f est continue et **strictement monotone** sur $[a\ ;\ b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **un unique** réel c appartenant à $[a\ ;\ b]$ tel que $f(c) = k$.

Exemple Reprenons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{9}{4}x^2 + 6x - 3$.



x	0	α	2
f	-3 ↗	0 ↗	2

Sur $[0\ ;\ 2]$, f est continue, strictement croissante et admet pour minimum -3 et maximum 2.
Donc, f prend une fois, et une seule, toutes les valeurs intermédiaires entre -3 et 2.
En particulier, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α entre 0 et 2.

REMARQUE : Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique aussi pour f continue sur un intervalle I de type : $[a\ ;\ b[$, $]a\ ;\ b]$, $]a\ ;\ b[$, $[a\ ;\ +\infty[$, $]a\ ;\ +\infty[$, $]-\infty\ ;\ b]$ ou $]-\infty\ ;\ b[$, $]-\infty\ ;\ +\infty[$.
Si une borne a ou b de l'intervalle est ouverte, alors on remplace $f(a)$ ou $f(b)$ par la limite de f en cette borne ; si une borne de l'intervalle est $\pm\infty$, alors on considère la limite de f en $\pm\infty$.

MÉTHODE 4 Exploiter le théorème des valeurs intermédiaires

► Ex. 45 p. 69

Le théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.) est utile pour prouver l'existence d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$ et dénombrer ces solutions. Pour cela :

- On dresse le tableau de variation de la fonction f ;
- On applique le T.V.I. à chaque intervalle où la fonction est strictement monotone.

Exercice d'application Dénombrer les solutions de l'équation (E) : $x^4 + 3x^3 + x^2 + 1 = 0$.

Correction $f : x \mapsto x^4 + 3x^3 + x^2 + 1$ est une fonction polynôme de degré 4 dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x = x(4x^2 + 9x + 2) = x(x+2)(4x+1)$ après factorisation du trinôme.
On établit alors le tableau de signes de $f'(x)$ et de variation de f :

x	$-\infty$		α		-2		β		$-\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↘	-3	↗	0	↗	$\simeq 1,02$	↘	1	↗	$+\infty$

Sur $]-\infty\ ;\ -2]$, f est continue, strictement décroissante et : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $f(-2) = -3$.
Donc, d'après le T.V.I., l'équation (E) a une unique solution α inférieure à -2.
Sur $\left[-2\ ;\ -\dfrac{1}{4}\right]$, f est continue, strictement croissante et : $f(-2) = -3$; $f\left(-\dfrac{1}{4}\right) \approx 1,02 > 0$.
Donc, d'après le T.V.I., l'équation (E) a une unique solution β comprise entre -2 et $-\dfrac{1}{4}$.
Sur $\left[-\dfrac{1}{4}\ ;\ 0\right]$ et $[0\ ;\ +\infty[$, le minimum de f est $1 > 0$ donc on n'y trouve pas de solution.
Conclusion : l'équation (E) admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.